שיטת עצי רקורסיה - טענות האינדוקציה

גלעד אשרוב

21 במרץ 2010

מסמך זה הוא השלמה למה שראינו בכיתה.

$$T(n) = 3 \cdot T\left(\frac{n}{4}\right) + n^2$$

נעיר ששורש העץ מסומן ברמה 1.
יש לנו שתי טענות שאותן נרצה להוכיח:

טענה 1. ברמה ה - i יש 3^i קריאות ל - $T(n/4^i)$.

הוכחה: בסיס: ברמה ה־1 (בשורש) יש 3 קריאות ל - $T(\frac{n}{4})$. נכון על פי הנוסחא.
צעד: נניח שברמה ה - k יש 3^k קריאות ל - $T(\frac{n}{4^k})$.
לפי הנוסחא, ברמה ה- $k+1$, כל נוסחא כזו תקרא ל - 3 קריאות ל - $T(n/4^{k+1})$. נקבל אם כן שברמה ה - $k+1$ יש $3 \cdot 3^k = 3^{k+1}$ קריאות ל - $T(n/4^{k+1})$. ■

טענה נוספת לגבי העבודה:

טענה 2. ברמה ה - i מתבצע $3^{i-1}\left(\frac{n}{4^{i-1}}\right)^2$ עבודה.

הוכחה: לפי האינדוקציה הקודמת ברמה ה - $i-1$ יש 3^{i-1} קריאות ל - $T(n/4^{i-1})$. קריאות אלו הן העבודה שמבוצעת ברמה ה - i. לפי הנוסחא, כל קריאה כזו מבצעת $\left(\frac{n}{4^{i-1}}\right)^2$ עבודה. לסיכום, ברמה ה־i מתבצע:

$$3^{i-1} \cdot \left(\frac{n}{4^{i-1}}\right)^2$$

עבודה. ■

סיום החישוב: נסכם את העבודה שמבצעים בכל הרמות בעץ. בעץ ישנם $\log_4 n$ רמות (למה?), אם כי - זה לא באמת משנה כמה רמות יש בעץ (נראה מיד מדוע). נקבל:

$$\begin{aligned} T(n) &= \sum_{i=1}^{\log_4 n} 3^{i-1}\left(\frac{n}{4^{i-1}}\right)^2 = \sum_{i=0}^{\log_4 n-1} 3^i\left(\frac{n}{4^i}\right)^2 = n^2 \cdot \sum_{i=1}^{\log_4 n-1}\left(\frac{3}{4^2}\right)^i \\ &= n^2 \cdot \sum_{i=1}^{\log_4 n-1}\left(\frac{3}{16}\right)^i \le n^2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{3}{16}\right)^i = n^2 \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{3}{16}}\right) = n^2\frac{16}{13} = O(n^2) \end{aligned}$$

אנו מקבלים חסם הדוק $\Theta(n^2)$ בזכות העובדה שכבר ברמה הראשונה מתבצע n^2 עבודה.