מבני נתונים 89-120
תרגיל 5

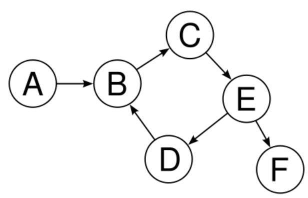
גלעד אשרוב צבי קופולביץ'

19 באפריל 2010

ההגשה ביחידים. כל סטודנט נדרש לחשוב, לפתור ולכתוב את התרגיל בעצמו. מותר להתייעץ עם סטודנטים אחרים - רק אחרי שניסית בכל כוחך לשבת על התרגיל לבד. בכל אופן, חל איסור מוחלט להסתכל על תרגיל כתוב של אחר, וחובה על כל סטודנט לכתוב את התרגיל לבדו.

תאריך הגשה: לשבועיים! (תרגול 7) - בין התאריכים 27.04 ל - 02.05

שאלה 1. נתון האיור של הגרף הבא:



(א) הראה כיצד ניתן לייצג את הגרף בעזרת מטריצת שכנויות.

(ב) הראה כיצד ניתן לייצג את הגרף בעזרת רשימת שכנויות.

שאלה 2. יהי $G = (V, E)$ גרף מכוון. נגדיר את הגרף המשוחלף ($transpose$) של G להיות $G^T = (V, E^T)$ כך ש:

$$E^T = \{(u, v) \mid (v, u) \in E\}$$

בהינתן גרף מכוון $G = (V, E)$ הנתון ע"י רשימת שכנויות, הציגו אלגוריתם המחזיר את G^T בזמן $O(|V| + |E|)$. הסבירו את תשובתכם.

שאלה 3. נגדיר בור בגרף מכוון $G = (V, E)$ בצורה הבאה:

קודקוד $v \in V$ בגרף G נקרא בור, אם v הינו בעל דרגת יציאה 0 (כלומר, לא יוצאים ממנו קשתות), ובעל דרגת כניסה n-1 (מכל שאר הקודקודים - ישנה קשת לקודקוד v).

בהינתן מטריצת שכנויות של גרף מכוון $G = (V, E)$ יש למצוא את הבור בגרף, או לציין שאין כזה, בזמן $O(|V|)$. הסבירו את תשובתכם.

שאלה 4. הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:

בכל גרף לא מכוון שבו לפחות 2 קודקודים, קיימים לפחות 2 קודקודים בעלי אותה הדרגה.

שאלה 5. הגדרה: יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון. רכיב קשיר ב - G הוא קבוצה של קודקודים $C\subseteq V$ מקסימלית, כך שלכל זוג קודקודים $(u,v)\in C$ קיים מסלול ב - G בין u ו - v.
הוכיחו כי ביער מסדר n (כלומר - n קודקודים) עם k רכיבי קשירות יש n-k צלעות.

(**הערה:** בצורה אינטואיטיבית, רכיבי הקשירות של יער הוא אוסף העצים המכילים את היער).

שאלה 6.

1. הוכיחו כי ביצוע טיול *postorder* על עץ שאינו בינארי ייקח $O(|V|)$. (ביצוע מעבר *postorder* על עץ שאינו בינארי - מבקרים קודם בבנים, ולאחר מכן בקודקוד האב. סדר המעבר בין הבנים אינו משנה - אך קבוע ומוגדר היטב).
2. נניח נתונים שני עצים T_1 ו - T_2, כך שמספר הקודקודים באחד העצים הוא x, ומספר הקודקודים בעץ השני הוא y (ערכי x ו - y אינם ידועים). הציגו אלגוריתם המקבל כקלט את שני העצים, קודקוד כלשהו מכל אחד מהעצים (קודקוד התחלתי), וצריך להחזיר איזה עץ הוא קטן יותר. האלגוריתם צריך לרוץ בזמן $O(\min\{x,y\})$.
3. נתון עץ $T=(V,E)$, ואנו רוצים לתמוך בשתי הפעולות הבאות:

   (א) $remove(u,v)$ - הורד את הקשת בין u ו - v.

   (ב) $connected(u,v)$ - האם יש מסלול בין u ו - v.

אנו רוצים שהזמן שלוקח לטפל בכל פעולת $connected$ יהיה $O(1)$. לשם־כך, נשמור ליד כל קודקוד סימן המראה באיזה עץ הקודקוד נמצא. במצב ההתחלתי יש לנו יער בעל עץ יחיד, ולכן כל הקודקודים יהיו בעלי אותו הסימן. לאחר כל פעולת $remove$ יווצר לנו עץ נוסף ביער, ולכן נשנה את הסימון על הקודקודים באחד העצים. פעולת $connected(u,v)$ תתבצע ע"י השוואת הסימונים בין הקודקודים u ו־ v (האם הם נמצאים באותו העץ).

(א) הסבירו בצורה מדוייקת כיצד תתבצע פעולת עדכון סימון הקודקודים שבתוך פעולת $remove$. בתשובתכם התייחסו לאיזה עץ נשנה את הסימון.

(ב) נניח ש - $n=|V|$. לאחר סידרה של n־1 פעולות $remove$ - נקבל יער בעל n קודקודים. הוכיחו שמספר הפעמים שמשנים את הסימונים בכל הקודקודים יחד חסום ע"י $O(n\log n)$.

רמז: נסו לחסום את מספר הפעמים שהסימון של קודקוד ישתנה במשך כל הסדרה.