

## מבני נתונים 89-120

### תרגיל 11

צבי קופלביץ'

גלעד אשרוב

7 ביוני 2010

ההגשה ביחידים. כל סטודנט נדרש לחשוב, לפתור ולכתוב את התרגיל בעצמו. פותר להתייעץ עם סטודנטים אחרים - רק אחרי שניסית בכל כוחך לשבת על התרגיל לבד. בכל אופן, חל איסור מוחלט להסתכל על תרגיל כתוב של אחר, וחובה על כל סטודנט לכתוב את התרגיל לבדו.

**תאריך הגשה:** לשיעור התרגול הבא (תרגול 13), בקבוצת התרגול - בין התאריכים 13.06 ל- 16.06.

**בכל השאלות הדורשות להציג אלגוריתם - יש להסביר במילים כיצד האלגוריתם עובד, ומדוע הוא עובד. הנימוקים צריכים להיות משכנעים.**

**שאלה 1.** נתונים מספרים  $0 \leq x_0, \dots, x_{n-1}$ , כך שלכל  $i$ ,  $x_i \leq T$ . מצא אם קיים  $i \neq j$  עבורו  $x_i = x_j$ . (ניקוד מלא יינתן על אלגוריתם הרץ בזמן  $O(n)$ ).

**שאלה 2.** נטיל קוביה לא מאוזנת, המקבלת "עץ" בהסתברות  $p$  ( $0 < p < 1$ ), ו"פאלי" בהסתברות  $1 - p$ . נשחק במשחק הבא: נטיל את הקוביה שוב ושוב עד אשר נקבל עץ. כלומר, נטיל את הקוביה, אם נקבל "עץ" - נעצור, אם נקבל "פאלי" - נטיל שוב את הקוביה. חשבו את תוחלת מספר ההטלות במשחק.

**שאלה 3.** תהי  $f_a(x) = ax \bmod m$ . הוכיחו שהמשפחה  $H = \{f_a \mid 0 < a < m\}$  אינה משפחה אוניברסלית.

**שאלה 4.**

(א) נניח ואנו משתמשים בפונקציית  $hash$  אקראית עבור קבוצה  $S$  בעלת  $n$  מפתחות שונים זה מזה, לתוך מערך  $T$  באורך  $m$ . מהי התוחלת של מספר ההתנגשויות? במילים אחרות, מהי התוחלת של גודל הקבוצה:  $\{(x, y) \mid h(x) = h(y)\}$ ?

(ב) הראו שאם  $|U| > nm$ , אזי לכל פונקציית  $hash$ ,  $h : U \rightarrow \mathbb{Z}_m$ , קיימת תת קבוצה של  $U$  בגודל  $n$ , המורכבת ממפתחות שכולם מגיעים לאותו התא.

**שאלה 5.** (ממבחן) כל ילד צרפתי לומד בבית ספר יסודי את הבדיקה הפשוטה הבאה שאמורה לגלות טעויות בכפל מספרים גדולים. הבדיקה מבוססת על  $Hashing$  בצורה הבאה: נתונים שני מספרים  $X$  ו-  $Y$  שעלינו להכפיל. כדי לבדוק שהתוצאה  $Z = X \cdot Y$  שקיבלנו אכן נכונה, ניקח פונקציית  $hash$  -  $h$  ונכפיל  $h(X) \cdot h(Y)$  ונשווה ל  $h(Z)$ . אם קיבלנו תשובות שונות, סימן שטעינו. הפונקציית  $h$  היא פשוט סכום הספרות עד שנגיע לספרה אחת, כאשר 9 נחשב ל-0. לדוגמה:  $X = 123456$ ,  $Y = 98765432$ , ולכן:  $Z = 12193185172992$ . אזי,

$$h(X) = 21 \rightarrow 3, h(Y) = 44 \rightarrow 8, h(Z) = 60 \rightarrow 6$$

ואכן מתקיים:

$$h(X) \cdot h(Y) = 3 \cdot 8 = 24 \rightarrow 6 = h(Z)$$

כדי להבין מדוע שיטה זו פועלת, שימו לב ש-9 אינו משפיע על חישוב הפונקציה  $h$ , למשל  $h(49) = h(13) = 4$ .  
לכן השיטה נקראת *règle par 9*, ז"א "החוק לפי 9".

(א) רשום/י נוסחה רקורסיבית עבור  $h(XY)$ .

(ב) הראה/י ש  $h(x) = X \bmod 9$ .

(ג) הוכח/י את נכונות השיטה.

**הערה:** יש לשים לב שלא כל פונקציית *hash* מקיימת את התכונה:  $h(X \cdot Y) = h(X) \cdot h(Y)$ . להיפך, סביר שפונקציית *hash* טובה לא תקיים תכונה זו.