

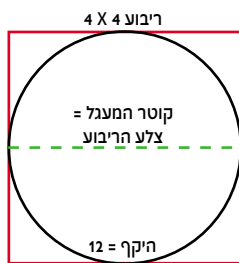
סוגיה "מתמטית" בחסכת סוכה

דוד אימבר

הגמרא במסכת סוכה דף ז' עמוד ב' דנה בדברי ר' יוחנן. נביא את עיקרי הגמ':

אמר רבי יוחנן: סוכה העשויה ככבשן, אם יש בהקיפה כדי לישב בה עשרים וארבע בני אדם כשרה, ואם לאו פסולה. כמאן כרבי, דאמר: כל סוכה שאין בה ארבע אמות על ארבע אמות פסולה. מכדי, גברא באמתא יתיב, כל שיש בהיקפו שלושה טפחים יש בו רוחב טפח, בתריסר סגי! הני מילי בעיגולא, אבל בריבועא בעיא טפי. מכדי, כמה מרובע יתר על העיגול רביע, בשיתסר סגי! הני מילי בעיגולא דנפיק מגו ריבועא, אבל ריבועא דנפיק מגו עיגולא בעיא טפי, משום מורשא דקרנתא. מכדי, כל אמתא בריבועא אמתא ותרי חומשא באלכסונא, בשבסר נכי חומשא סגי! לא דק... אמר ליה רב אסי לרב אשי: לעולם גברא באמתא יתיב, ורבי יוחנן מקום גברא לא קחשיב. כמה הווי להו תמני סרי, בשבסר נכי חומשא סגי! היינו דלא דק, ולחומר לא דק. רבנן דקיסרי, ואמרי לה דייני דקיסרי אמרי: עיגולא דנפיק מגו ריבועא רבעא, ריבועא דנפיק מגו עיגולא פלגא. ולא היא, דהא קחזינן דלא הוי כולי האי.

נסביר תחילה את הגמרא כפשוטה בעזרת פירוש רש"י ושטיינזלץ. רבי יוחנן אומר כי **סוכה העשויה ככבשן**, זאת אומרת עגולה, **כשרה** רק אם יש בהקיפה כדי **ישיבת 24 אנשים**. שיטתו של רבי



איור 1

יוחנן אינה להלכה שכן אנו פוסקים שגודל סוכה מספיק שראשו ורובו של אדם יכנסו בו. אם כן שואלת הגמרא – **כמאן** – לשיטת מי דבריו של רבי יוחנן ועונה, שהוא סובר כשיטת רבי כי סוכה צריכה להיות בגודל של 4×4 אמות. שוב תוהה הגמרא – **מכדי, גברא באמתא יתיב** – הרי אדם תופס אמה, – **וכל שיש בהיקפו שלושה טפחים יש בו רוחב טפח** – $1 - \pi$ שוה 3, – **בתריסר סגי** – הרי שבקוטר 4 ההיקף הוא 12 (איור 1) ומדוע רבי יוחנן מצריך 24? עונה הגמרא: – **הני מילי בעיגולא, אבל בריבועא בעיא טפי** – שאמנם נכון הדבר לגבי היקף העיגול שבתוך הריבוע אך היקף זה אינו מספיק שכן

היקף הריבוע עצמו גדול יותר. שואלת הגמרא שוב: – **מכדי, כמה מרובע יתר על העיגול רביע, בשיתסר סגי!** – בכמה הריבוע גדול יותר מהעיגול? ועונה: ברבע¹, אם כן מספיק 16 אנשים ומדוע רבי יוחנן מצריך 24? ועונה הגמרא: – **הני מילי בעיגולא דנפיק מגו ריבועא, אבל ריבועא דנפיק מגו עיגולא בעיא טפי, משום מורשא דקרנתא** – שאנחנו לא מדברים על העיגול החסום בתוך ריבוע של 4×4 , אלא על העיגול החוסם שהוא גדול יותר. אומרת הגמרא – **מכדי, כל אמתא**

1. מכיון שהקוטר הוא כאורך הצלע הרי שהיקף העיגול הוא 3 פעמים הצלע והיקף הריבוע 4 פעמים הצלע היינו הפרש רבע.

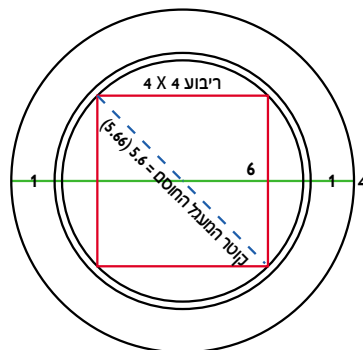


איור 2

בריבועא אמתא ותרי חומשא באלכסונא, בשבסר נכי חומשא סגיא! – בא נחשב את היקפו של העיגול החוסם. לצורך כך צריך לדעת את קוטרו של העיגול שהוא האלכסון של הריבוע (איור 2). מכיוון שידוע להם ששורש 2 הוא 1.4 הרי שהאלכסון הוא $1.4 * 4 = 5.6$ כפול 3 (π) הרי 16.8 דהינו 17 פחות חומש אם כך מדוע הצריך רבי יוחנן 24? עונה הגמרא – **לא דק** – שהוא לא דייק.

הגמרא ממשיכה לדון בנושא הדיוק ומגיע בסוף לאפשרות האחרונה – **אמר ליה רב אסי לרב אשי: לעולם גברא באמתא יתיב, ורבי**

יוחנן מקום גברא לא קחשיב. – רבי יוחנן לא הביא בחשבון את מקום ישיבת האנשים, דהיינו שהם יושבים מחוץ לעיגול המקיף את הריבוע (איור 3), – **כמה הוו להו? תמני סרי, בשבסר נכי חומשא סגיא!** – ומכיוון שהעיגול שרבי יוחנן דרש היקפו 24, אזי קוטרו הוא 8, ואם נוריד אמה משני הצדדים מקום האנשים, נקבל עיגול שקוטרו 6 והיקפו 18 שזה מעט יותר מהעיגול החוסם (16.8) – **היינו דלא דק ולחומרא לא דק** – ועל זה רבי יוחנן לא הקפיד כי זה לחומרה.

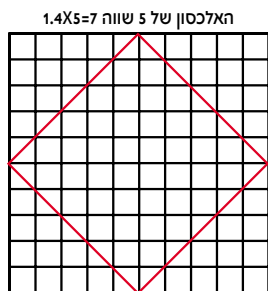


איור 3

לאחר כל הדיון הזה מביאה הגמרא פרוש אחר בשיטתו של רבי יוחנן פירושה של רבני או דייני קיסרי. לטענתם עיגול המוצא מתוך ריבוע הינו רבע, ואילו ריבוע המוצא מתוך עיגול הינו חצי. ועל זה אומרת הגמרא שזה לא נכון עובדתית.

רעיון בדברי רבי יוחנן ובערכו של π אצל חז"ל

במאמר בתחומין י"ט ה- π החז"לי – מנסה צבי שפלטר להסביר את דברי רבי יוחנן ושיטת חז"ל בכלל בערכו של π , בכך שכל הגופים העגולים שהגמרא דנה בהם הם למעשה חרוטים קטומים ולא גלילים. אך לפני שנביא את שיטתו נקדים את דברי התוספות לגבי ערכו של שורש 2.



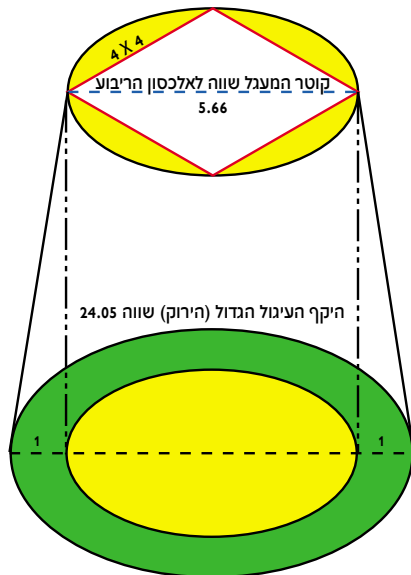
איור 4

הגמרא טענה כי שורש 2 שווה אחד ושני חמישיות דהיינו 1.4. התוספות מסביר כי המספר אינו מדויק שהרי אם נצייר ריבוע של עשר על עשר (כמו באיור 4) ונצייר ריבוע נוסף מאמצעי הצלעות הרי שהריבוע הפנימי הינו חציו של הראשון זאת אומרת שטחו 50. אבל לפי החישוב של שורש 2 ששוה ל-1.4 נקבל שצלע הריבוע הפנימי הינו $7 = 1.4 * 5$ ז"א שהריבוע הפנימי הוא 7



על 7 דהינו שיטחו 49. לכן אומרים התוספות ששורש 2 הוא מעט יותר מ-1.4. ואכן בעל המאמר בתחומין השתמש בערכו היותר מדויק של שורש 2. ומכך הוא מחשב שבריבוע של 4X4 האלכסון,

לפי החישוב של שורש 2, הוא 5.66 בקירוב. ומסביר את דברי הגמרא כי רבי יוחנן לא החשיב את מקום היושבים מכיוון שהסוכה נראתה כך (איור 5):



העיגול הקטן, שהוא חלקו העליון של הסוכה חוסם בתוכו ריבוע של ארבע על ארבע (מצייר באדום) שאלכסונו (בכחול), דהיינו הקוטר של העיגול (הצהוב), הינו 5.66. אלא שרבי יוחנן תיאר את העיגול הגדול הנמצא בתחתית הסוכה (בירוק) ששם האנשים יושבים, שקוטרו גדול באמה לכל צד דהיינו הקוטר הוא 7.66. נכפיל ב- π , 3.14, ונקבל 24.05 ולכן הצריך רבי יוחנן ישיבת 24 אנשים.

למרות הרעיון היפה, נראה שהנסיון להראות שחז"ל השתמשו בערך הנכון של π , במקומות שונים בש"ס, אינו מתאים לחישובים שהגמרא עושה לאורך כל הסוגיה. כך גם מסבירים הרמב"ם והמאירי, שחז"ל לא התאמצו לדייק בחישוביהם.

נסיון אחר להסבר הסוגיה ושיטתו של רבי יוחנן

למעשה המאמר בתחומין בא להסביר מדוע "רבי יוחנן מקום גברי לא קחשיב", שכן בגלל צורתה של הסוכה, בצורת חרוט קטום, האנשים שישבו בעיגול החיצון לא ישבו תחת הסכך והיו צריכים לקוף את ראשם לתוך הסוכה. שיטה אחרת אנו מוצאים ב"פני יהושע" הרואה בדברי רבי יוחנן שיטה פרקטית:

וצריך להעמיד דבריו באופן זה, שכאן מדובר באדם הרוצה לבנות סוכה, ואין בידו כלי מדידה, ולכן מושיב אנשים בעיגול, ובשטח שביניהם הוא מסמן את המקום בו יעמיד את דפנות הסוכה.

אלא שהסוגיה בכללה אינה מובנת. ראשית קשה מדוע הגמרא, לאחר שמצאה הסבר לדברי רבי יוחנן, הביאה את רבני קיסרי במיוחד שבסוף דחתה אותם כ"לא נכונים"? על כך עונים התוספות שבאמת קשה להעמיד את רבי יוחנן במצב ש"מקום גברי לא קחשיב", שהרי משמע במפורש מהגמרא בערובין שלא מעמידים את שיטתו כך, ולכן אפשר להסביר את רבי יוחנן רק כרבני

קיסרי. (כך גם כותב רבינו חננאל במקום). אלא שעדין לא ברור מה הרוחנו מהעמדתו כרבי קיסרי שכן דבריהם נמצאו כלא נכונים.²

שנית, לפי מסקנת הגמרא, לפי רב אסי, כאשר יש בהיקף העיגול 24 אמות אפשר להושיב שם 18 אנשים – **כמה הוו להו תמני סרי** – ולא 24 כפי שאמר רבי יוחנן, והגמרא לקחה מרבי יוחנן שכאילו אמר שצריך עיגול שהיקפו 24 אמות. ובכלל כל הסוגיה אינה ברורה, הרי כשהגמרא אמרה בהתחלה "בתריסר סגי" דובר שהיקף העיגול הינו 12 אמות ומכיוון שמקום אדם הוא אמה על אמה (מוכרחים לומר שגם הגמרא הבינה כך כשאמרה אחר כך "מקום גברי לא קחשיב" ולכן הורדנו מהקוטר אמה מכל צד) הרי שאי אפשר אפילו 12 איש להושיב בהיקף (לפי חישוב הגמרא שטח העיגול כולו הינו 12 אמות רבועות הרדיוס שוה 2, בריבוע זה 4, וכפול 3 (π) הרי 12 כך שברור שבהיקף בתוך העיגול אי אפשר להושיב 12 איש). כך שגם הסברו של הפני יהושע³ וגם ההסבר במאמר מתחומין יורד (ראו שם את ציורו המסביר ש-24 אנשים יושבים בעיגול הגדול וראשם ורובם תחת הסכך. לא ברור מדוע נכנס פה בכלל הנושא של ראשו ורובו שהוא בוודאי לא לשיטת רבי יוחנן).

שלישית מדוע רבי יוחנן מתיחס בכלל להיקפו של העיגול? הרי העמדנו את שיטתו לפי רבי שאומר שסוכה צריכה להיות 4x4 אמות וסברתו של רבי (כפי שמובנת מהגמרא לפני כן) שסוכה צריכה להיות כדירת קבע. ונשאלת השאלה האם רבי יתיר סוכה של 3x5 שגם היא היקפה 16, או 2x6? נראה שלא, כי רבי התכוון דווקא לשטח הסוכה, או יותר נכון לומר שצריך להיות רווח מספיק לאדם מסיביו על מנת שתיקרא דירת קבע (1x16 או 2x8 ששטחם 16 אמות רבועות ואפילו 3x8 לא יהיו כשרים לשיטת רבי). אם כן מדוע מדבר רבי יוחנן על היקף? בנוסף, אם בסופו של דבר אנו טוענים שרבי יוחנן סבר כדייני קיסרי, מה בעצם ההסבר לדבריהם?

התוספות אכן שואלים:

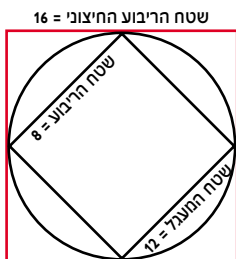
ותימה: היאך טעו במדה רבי יוחנן ודייני דקיסרי? דמאחר שלא מדדו הדבר, היאך עשו כלל על דבר שאינו?

ומשיבים:

ויש לומר: דקבלה בידם לשון זה של "ריבוע מגו עיגולא פלגא", והוא אמת לענין המקום, ולא לענין אורך החוט המקיף.

נראה לי כי אפשר להסביר את דברי רבי יוחנן בעזרת דברי התוספות. אך קודם נסביר למה התכוונו ששיטת רבני קיסרי נכונה לגבי השטח.

2. אין בעיה לעשות העמדה כזאת משום שכל הדין אינו להלכה אבל בכל זאת הדבר נראה תמוה.
3. אלא אם כן נגיד לשיטתו שנושיב 18 בני אדם אבל זה לא מה שאמר רבי יוחנן.



איור 6

ריבוע של 4×4 אמות שטחו 16 אמות רבועות (א"ר). שטח העיגול החסום הינו 12 א"ר (הרדיוס הינו 2 ולכן $2^2 \cdot \pi = 12.56$). השטח של הריבוע החסום בעיגול הוא חצי משטחו של הריבוע הגדול (ראה איור 6 כמו ההסבר של שורש 2 למעלה בתוספות) ז"א 8 א"ר. אם כן ההפרש בין הריבועים לעיגול הוא 4 א"ר שהוא חצי משטח הריבוע הקטן ורבע משטח הריבוע הגדול. אם נוסיף עיגול שיחסום את הריבוע של 4×4 הוא צריך להיות לפי דיני קיסרי בשטח של 24 א"ר. (אמנם אם נגדיל את הריבועים הדיוקים ילכו ויקטנו, וכמובן שאם יהיה מדויק הכלל אינו מדויק אבל זה הדיוק שאתו הם חישבו.⁴)

נחזור לדברי רבי יוחנן ונראה מה גרם לטעות בדבריו. אמר רבי יוחנן: סוכה העשויה ככבשן, אם יש בהיקפה כדי לישב בה עשרים וארבע בני אדם כשרה, ואם לאו פסולה.

ברור שכל הדיון בגמרא נערך בגלל המלה "בהיקפה", אלא שאם נדייק בדברי רבי יוחנן נראה שרבי יוחנן פשוט לא ידע על המינוח "שטח" למרות שלכך הוא התכוון. אם רבי יוחנן היה מתכוון להיקף היה צריך לומר בפשטות – אם יש בהיקפה עשרים וארבע אמות, מדבריו – "כדי לישב בה" משמע שרבי יוחנן אמר: אם ההיקף הוא כזה שהוא "מעגל" בתוכו 24 מקומות ישיבה דהיינו 24 אמות רבועות כשרה. וכפי שראינו לשיטת רבני קיסרי העיגול החוסם את הריבוע של ארבע על ארבע שטחו 24 א"ר. זאת אומרת שכשהגמרא העמידה את רבי יוחנן כדבריהם היא חוזרת בה מהדיון לגבי ההיקף ואומרת שבאמת רבי יוחנן התכוון לשטח.

נותר לנו עכשיו להבין את דברי הגמרא המסכמים את שיטתם של דיני קיסרי. אלא שגיליתי מעין דבריי במאירי על הסוגיה בערובין ואולי כדאי שנביא את הגמרא שם:

א"ר יוחנן חלון עגול צריך שיהא בהיקפו עשרים וארבע טפחים... מכדי כל שיש בהיקפו שלושה טפחים יש בו ברוחבו טפח בתריסר סגיא? הני מילי בעיגולא אבל בריבועא בעינן טפי. מכדי כמה מרובע יתר על העגול רביע, בשיתסר סגיא? ה"מ עיגולא שנפיק מגו ריבועא אבל ריבועא שנפיק מגו עיגולא בעינן טפי. מאי טעמא משום מורשא דקרנתא. מכדי כל אמתא בריבועא אמתא ותרי חומשי באלכסונוא בשיבסר נכי חומשא סגיא? רבי יוחנן

4. נערך 3 חישובים: א. אלכסון הריבוע לפי הגמרא 5.6 לכן השטח הוא $2.8^2 \cdot 3 = 23.52$.
 ב. חצי האלכסון לחישובינו $24 = 3 \cdot (\sqrt{2} \cdot 2)^2$.
 ג. חצי האלכסון לחישובינו וה- π שלנו $25.12 = 3.14 \cdot (\sqrt{2} \cdot 2)^2 \cdot \pi$.
 5. גם התוספות שהבאנו לא קוראים לזה "שטח" אלא "לעניין המקום".

אמר כי דייני קיסרי ואמרי לה כרבנן דקסרי, דאמרי: עיגולא מגו ריבועא ריבועא, ריבועא
מגו עיגולא – פלגא.

נראה כי הגמרא בערובין דומה מאד לגמרא שלנו אם כי יש בה מספר שינויים חשובים. האחד שרבי יוחנן בגמרא בערובין אינו מדבר על אנשים אלא על טפחים, ללא מידת עומק, ובכל זאת המאירי (בגירסא אחרת במאירי ראיתי שהוא מביא זאת בשם בעל המאור) מבין את תרוץ הגמרא לגבי דייני קיסרי כי רבי יוחנן דיבר על שטח כפי שהסברתי אצלנו בסוכה כשהלשון אצלנו יותר קל להסבר כזה.

שינוי נוסף הוא העובדה כי הגמרא בערובין מעמידה במפורש את רבי יוחנן כרבני קיסרי משום שאין לגמרא את האפשרות לתרץ "מקום גברי לא קחשיב". ואכן התוספות שהבאנו למעלה רצה להוכיח מערובין שגם אצלנו בסופו של דבר אנו מעמידים את רבי יוחנן כדייני קיסרי. אלא שהמאירי, בסוכה, דווקא מהשוני שיש בערובין טען שאצלנו לא מעמידים את רבי יוחנן כדייני קיסרי.

השינוי הבולט ביותר בין הסוגיות הוא דווקא בסיכום הגמרא. בעוד שאצלנו, בסוכה, נראה כאילו דוחים את דבריהם של דייני קיסרי, בערובין משאירים את דבריהם ללא תגובה. ואכן המאירי שואל מדוע בסוכה דחו את דבריהם הרי לפי הסברו דבריהם נכונים? ועל כך עונה המאירי:

ומה שאמרו במסכת סוכה "דלא היא כולא האי", חוזר למה שאמרו עגולא מגו ריבועא רבועא, רצה לומר: שהריבוע יתר עליו רביע ואינו כל כך... ואף על פי שאף לשאר החכמים היה יכול לומר ולא היא שהרי על דרך האמת יש להיקף העגול על רוחב הקוטר שלוש כמוהו ועוד שבעית... מכל מקום לענין מדידה אין הכוון מצוי בו כל כך עד שנדקדק עליהם בדבר מועט, אבל דייני קיסרי שהיו מדברים על דרך התשבורת (מתמטיקה) ושהיו סבורים להעלות דבריהם בדקדוק מכוון יהיה ראוי לדקדק עליהם...

אם כן לשיטתו לא דחינו את דבריהם כלא נכונים אלא כלא מדוייקים מבחינה מתמטית. נראה לי קצת קשה לקבל הסבר זה בגמרא, שכן לא מצאנו בשום מקום שהגמרא התייחסה ל- π כשלוש ושביעית ואפילו לא לערך המדוייק של שורש 2. נוסף לכך עדין קשה מדוע הגמרא בערובין לא דוחה באותה דרך את דבריהם. לכן הייתי רוצה להציע אפשרות אחרת:

ולא היא, דהא קחזינן דלא הוי כולי האי תרגום: אינו כן, שהרי רואים אנו שאינו עד כדי כך.



פירושו: אין אנו מקבלים את שיטתו של רבי יוחנן, המצריך 24 איש כדי להכשיר סוכה, שהרי ראינו שלא הצריכו כל כך הרבה אנשים כדי להכשיר סוכה.⁶ אבל בערובין לא דחינו כך שכן בסופו של דבר (נראה ש) פוסקים שם כרבי יוחנן.

סיכום

מצאנו הסבר לדברי רבני קיסרי ומשום כך העמידו את שיטתו של רבי יוחנן כמותם, אבל לא הצלחנו להבין את כל הסוגיה שלפני כן, שכן היא לא מתישבת עם חשבון פשוט. אם נדחק לומר ש "מכדי גברי באמתא יתיב" זה לא אמה בריבוע יהיה קשה להסביר את דברי הגמרא "מקום גברי לא קחשיב" משום כך מוסיפים אמה מכל צד לקוטר העיגול, והדבר צריך עיון גדול. יתכן אולי לומר, על דרך הפרשנות האקדמית, שהייתה פה "העתקה" של הסוגיה בערובין. כפי שאמרנו הסוגיה בערובין מובנת מבחינה מתמטית, שהרי לא דובר שם על דבר התופס נפח, אנשים, אלא על טפחים.⁷

דוד אימבר (1954) בוגר הישיבה התיכונית "נתיב מאיר" בירושלים. לאחר השירות הצבאי, כחובש קרבי בגדוד 50, למד שלוש שנים בישיבת "מרכז הרב". באוניברסיטה העברית למד לתואר בחוגים מדעי המחשב ותלמוד.

6. ישנה גירסא בגמרא במקום "דלא הוי" כתוב "דלא הוי שיעורא" ואז הדברים מתפרשים עוד יותר טוב.
7. המאמר בתחומין מציע גם בערובין את אותה הצעה בטענה כי גם החלונות העגולים היו בצורת חרוט קטום.