על היחס שבין היקף עיגול לקוטרו

מאת
בועז צבאן

נפתח בדיון שכבר הבאנו במקום אחר [2]. המשנה בעירובין יד, א מביאה את הכלל כל שיש בהיקפו ג' טפחים יש בו רוחב טפח[1]. מכלל זה יוצא, שהיחס בין היקף העיגול קוטרו הוא 3[2]. שואלת על כך הגמרא מנא הני מילי? ומשיבה אמר רבי יוחנן אמר קרא ויעש את הים מוצק עשר באמה משפתו עד שפתו עגול סביב וחמש באמה קומתו וקו שלשים באמה יסוב אותו סביב[3]. מקשה הגמרא והא איכא שפתו — יתכן שעובי השפה לא נלקח בחשבון[4], ואז יוצא שהערך שניתן בפסוק אינו מדבר על היחס שבין ההיקף (המלא) של עיגול לקוטרו. משיב רב פפא שפתו שפת פרח שושן כתיב ביה, דכתיב ועביו טפח ושפתו כמעשה כוס פרח שושן. מפרש רש"י, שעובי השפה "דק מאד כפרח שושן" (ולכן הוא זניח לשיטת רב פפא). ההסבר לא מניח את דעת הגמרא: והאיכא משהו! — עדיין יש כאן אי דיוק מסויים! משיבה הגמרא, כי קא חשיב מגואי קא חשיב — גם ההיקף וגם הקוטר נמדדו מבפנים, ולכן מדובר בדיוק על היחס שבין היקף עיגול לקוטרו וניתן ללמוד מהפסוק את הכלל הנ"ל.

מדיון זה אנו למדים עד כמה חשוב הדיוק של הכללים המובאים בגמרא. מתתיהו הכהן מונק [4] מעיר שהגמרא נצרכת ללימוד מפסוק, משום שידוע לה שכלל זה אינו תואם למתמטיקה, ולמעשה השאלה מנא הני מילי אינה שאלה מתמטית: המשנה באה ללמדנו דין מחודש, ולכן יש צורך בפסוק המלמדנו, שלהלכה עלינו להשתמש בערך המובא במשנה; זוהי גזרת הכתוב[6].

1. מקומות נוספים בהם מובא הכלל: שם דף יג, ב; דף עו, א; סוכה דף ז, ב; ובמשנה אהלות י"ב משנה ז', שם מובא הכלל בניסיוח "כמה יהא בהיקפה ויהא בה פותח טפח בזמן שהיא עגולה? היקפה ג' טפחים".
2. כידוע, ערך זה אינו הערך המקובל במתמטיקה, שם היחס הוא ...π=3.14159.
3. מלכים א', פרק ז', פס' כ"ג — מדובר בים (מיכל מים גדול) שעשה שלמה בבית המקדש, שהיתה צורתו עגולה.
4. ז"א הקוטר נמדד מבחוץ, ואילו ההיקף — מבפנים.
6. א. הרא"ש בתשובות כלל ב' סימן י"ס שאל את הרשב"א לגבי המשמעות של "מנא הני מילי", ולא נמצאה תשובת הרשב"א בנושא זה. ה"חשק שלמה" (על עירובין יד, א) מסביר בצורה הנ"ל את הגמרא

מונק תולה את ההבדל בין ערכי הגמרא לערכים המתמטיים במציאות הניסית של בית המקדש, שבו לא התקיימו כללי הגיאומטריה, ומדגים מפרקי אבות[7], שבעזרה היו "עומדים צפופים ומשתחווים רווחים". מצאנו להסבר זה ראיות מפורשות בגמרא: במסכת יומא[8] נאמר **והאמר ר' לוי דבר זה מסורת בידינו מאבותינו מקום ארון אינו מן המדה,** דהיינו לפי החשבון המתמטי יוצא, שארון הקודש אינו תופס כלל מקום בבית קדשי הקדשים שבבית המקדש(!), הדבר מבואר בברייתא במגילה[9] **ארון שעשה משה יש לו עשר אמות לכל רוח וכתיב ולפני הדביר עשרים אמה אורך וכתיב כנף הכרוב האחד עשר אמות וכנף הכרוב האחד עשר אמות — ארון גופיה היכא הוי קאי?! אלא לאו שמע מינה בנס היה עומד.**

לאור זאת נפנה למאמרו של אסא כשר[10]. בהערתו החמישית כותב כשר: "יחס היקף העיגול לקוטרו, יחס שטח העיגול לקוטרו, יחס שטח העיגול לשטח הריבוע החוסם אותו, יחס שטח העיגול לשטח הריבוע החסום בו — כל אלה הם יחסים הנקבעים בתוקף הגדרותיהם של מעגל וריבוע, תוך שימוש בכללי הוכחה מסויימים, ולכן בכל מקום שמדובר על עיגול וריבוע, על מעגל וריבוע, על היקף ושטח וכדומה, היחסים קבועים בתוקף המובן המילולי של המונחים (כאן מעיר כשר: בלשון טכנית — הפסוקים המתמטיים הקובעים את היחסים האמורים — אמיתיים באופן אנאליטי), ...לשון אחרת: אם ההגדרה המקובלת של עיגול חלה על מה שמר מונק רוצה לקרוא 'עיגול שהיה בתחום בית המקדש' — חלים שם גם היחסים המקובלים".

אכן, קשה שלא להשתעשע ממשחקי המלים הקונבנציונליסטיים של כשר[11]. כל כך פשוט: אם יבוא אדם וימדוד את היקפו של הים שעשה שלמה ואת קוטרו, ויאמר שהיחס ביניהם הוא בדיוק 3, ייאמר לו על פי הטיעון של כשר שאם אכן תוצאותיו מדוייקות, אזי הים שעשה שלמה אינו עגול[12]!

בשם אחיו. מסתבר, שהרב מונק כיוון לדעתו. ב. יש ראשונים (הראב"ד בספר הבתים, שערי עירובין, שער רביעי סעיף ב' והמאירי על הסוגיה בעירובין ע"ו) שאינם סוברים כך, ולשיטתם יש להוסיף על שיעורי הגמרא בהתאם לשיעורים המקובלים במתמטיקה.

7. פרק ה' משנה ה'.

8. דף כא, א.

9. דף י, ב, ובניסוח דומה — בבא בתרא, דף צט, א.

10. [3]. למיטב ידיעת כותב שורות אלה, מעולם לא זכה מאמרו של כשר להתיחסות. ייתכן שהדבר נובע מלשון תקיפה מדיי שנקט כשר במאמרו (עיין שם).

11. קונבנציונליזם הינו זרם בפילוסופיה של המדעים, לפיו "טענות מדעיות הינן, ללא יוצא מהכלל, הגדרות מפורשות או הגדרות סמויות. אין אנו מבחינים שאלה הגדרות, אבל הן הגדרות למרות הכל, ושום עובדה לא יכולה להפריך הגדרה" ([1], עמ' 47). כדי להבין את דברינו בצורה מדוייקת יותר, אנו מפנים את הקורא לחוברת המצויינת [1] (אף כי הגישה שם קיצונית מעט).

12. נתאר לעצמנו מדען קונבנציונליסט שאומר שמים לעולם אינם רותחים. נוכל להראות לו אלפי ניסויים

כדי לראות שאין בדברי כשר כדי לדחות את שיטתו של מונק, ישנן מספר דרכים. האחת היא לומר, שאין הכרח שחוקי הלוגיקה חלים בתוך בית המקדש, ולכן לגזירה האנאליטית אין תוקף. גישה זו דורשת הבנה מקיפה בדקויות הלוגיקה המתמטית (כגון היחס שבין סמנטיקה לתחביר), ולכן לא נרחיב בנקודה זו. הדרך השניה היא לומר, שאין הכרח לקבל את התפיסה הקונבנציונליסטית[13], ולכן אם אנו מוצאים עיגול שבו היחסים שונים, פירושו שהגדרתנו המקורית למושג "עיגול" לא היתה נכונה, ועלינו לשנותה (במקום לנסות "לרבע" את העיגול שמצאנו). הדרך השלישית אומרת שאין צורך ללכת כל כך רחוק: בדבריו של כשר יש נקודה אחת, שלא פורש מה היא, והיא "ההגדרה המקובלת של עיגול".

מהי "ההגדרה המקובלת של עיגול" לדעת כשר — זאת איננו יודעים[14]. מה שאנו יכולים לדעת בקלות הוא, מהי ההגדרה של "עיגול" לדעת הרוב המכריע של אנשי המדע (אם לא כולם). יפתח נא הקורא כל ספר שבו מופיעה הגדרת "מעגל" או "עיגול" ויראה, שהמושגים היחידים שנזכרים שם הם "נקודה/ות" ו"מרחק" או "קטע". כל ההגדרות אינן אלא וריאציה של ההגדרה הבאה:

הגדרת מעגל. גירסה א. המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שהקטע המחברן לנקודה נתונה (שתיקרא "מרכז המעגל") חופף לקטע נתון (שנקרא "מחוג/רדיוס המעגל").

גירסה ב. המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מנקודה נתונה (שתיקרא "מרכז העיגול") שוה למספר נתון (אורך "מחוג/רדיוס המעגל").

האינטואיציה אומרת, שהגדרה זאת משאירה "חופש" רב, ואין שום הכרח שהיחס בין היקף מעגל לקוטרו יהיה בדיוק $\pi=3.1415...$[15]. נראה שתי דוגמאות של מודלים מתמטיים, שבהם היחס לעולם אינו π.

מודל 1. המרחב הוא פני הכדור התלת־מימדי[16]:

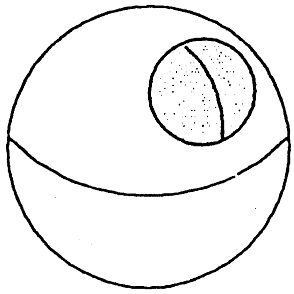
שמפריכים לכאורה את טענתו; והוא יאמר "אם אכן ניסוייכם מדוייקים, אזי אין אלו מים, כיון שמים לעולם אינם רותחים!".

13. ואכן מרבית הפילוסופים של המדע אינם מחזיקים בעמדה הקונבנציונליסטית, לפחות לא בצורתה הקיצונית עד כדי אבסורד.

14. אנו יכולים רק לנחש, שהוא מוסיף להגדרה את היחסים, או לפחות כמה אקסיומות של הגאומטריה האוקלידית.

15. אם הקורא תמה על כך, זה משום שחונך על ברכי הגאומטריה האוקלידית, שהיא מקרה מיוחד מאד, ומוריו לא טרחו להבהיר לו (מחוסר ידיעה?) שיש גאומטריות אלטרנטיביות. לדיון בגאומטריות אלטרנטיביות ראה [6].

16. ברור שצורה זו הרבה יותר קרובה לצורת העולם ה"אמיתי" שבו אנו חיים (כדור הארץ), מאשר ה"מישור" האוקלידי שבו המרחב שטוח...



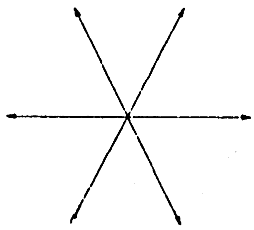
כל הגאומטריה במרחב כזה מתרחשת על פני הכדור, וכך גם קוטרו של מעגל נמדד על פני הכדור (ראה דוגמא בציור). מהו היחס בין היקף עיגול לקוטרו בעולם כזה? קל לראות, שכאשר המעגל גדל, היחס מתקרב ל 2, וכאשר המעגל קטן, היחס מתקרב ל π, אך לעולם אינו שוה ל π[17].

מודל 2. נשים לב שההגדרה של מעגל אינה דורשת קיום של אקסיומות הגאומטריה האוקלידית. לכן אפשר לדבר גם על מודלים שבהם כל מה שיש לנו הוא נקודות ומרחקים בין נקודות. מודלים כאלו נקראים "מרחבים מטריים". נראה מודל שבו תמיד היחס בין היקף מעגל לקוטרו הוא בדיוק 3.

ראשית ניתן הסבר רעיוני של המודל — כדי שיוכלו להבינו גם אלו שאינם עוסקים במתמטיקה, ולאחר מכן נביא את ההסבר הפורמאלי, לסבר את אזני המתמטיקאים.

שערו בנפשכם עולם שטוח, שבו ניתן ללכת אך ורק בכיוון מזרח; או בזויות של 60, 120, 180, 240 או 300 מעלות ביחס לכיוון מזרח[18]. המרחק בין שתי נקודות יוגדר להיות האורך של המסלול הקצר ביותר המחבר ביניהן. בעולם כזה, אוסף כל הנקודות שמרחקן מנקודה נתונה הוא קבוע, מהווה משושה משוכלל. לכן יהיה היחס בין היקף העיגול לקוטרו בדיוק 3.

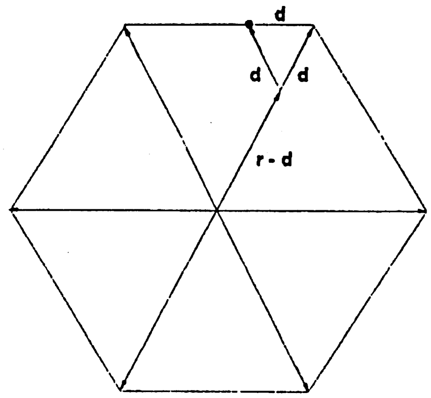
נצייר זאת. כיווני התנועה האפשריים הם:



17. א. במודל זה, ה"ישרים" הם מעגלים גדולים, כלומר מעגלים שמרכזם האוקלידי הוא מרכז הכדור (אנלוגי, למשל, לקוי האורך של כדור הארץ). בפרט, הקוטר הינו קטע מ"ישר" כזה. ב. מעניין לציין, שבמודל זה — סכום הזויות במשולש תמיד גדול מ־180 מעלות.

18. ניתן להשוות זאת לחלקים מסויימים של מנהטן, שם כל הכבישים הם בכוון מזרח או בזויות 270, 180, 90 מעלות ביחס למזרח (מידע מעניין זה קיבלתי מג'ף אדלר, המחלקה למתמטיקה באוניברסיטת שיקגו).

אלו הכיוונים היחידים שמותר לנוע בהם; לכן המעגל יראה כך:



ברור שמרחק הקודקודים מהמרכז הוא אורך החץ. כדי להבין שגם מרחק שאר הנקודות מהמרכז שוה לאורך החץ, נתבונן למשל במסלול ש"הולך" דרך החץ המתאים, ו"פונה" לעבר הנקודה ברגע שהדבר אפשרי (במגבלות כיווני התנועה). המשולש הקטן שנוצר (ראה ציור) הוא שוה צלעות (עובדה זו נובעת מהזויות שבחרנו עבור התנועה), ולכן המרחק יהיה (ראה בציור) $(r-d)+d=r$, כדרוש.

כל שנותר לנו הוא להגדיר מודל זה מבחינה פורמאלית.

1. ה"עולם" של המודל הוא R^2 — המישור האוקלידי הדו־מימדי.
2. פונקצית המרחק ("מטריקה") dist מוגדרת ע"י:

$$\mathrm{dist}((a,b),(c,d)) = \max\begin{cases} |a-c| + \frac{\cancel{2}\sqrt{3}}{3}|b-d| \\ \frac{2\sqrt{3}}{3}|b-d| \end{cases}$$

הקורא יוכל לודא שאכן המעגל ייראה כבציור הנ"ל, ואורכו הוא 3 פעמים קוטרו, וזאת על פי אותה מטריקה[19]. יתר על כן, הגדרנו את המטריקה כך שהיקף העיגול־המשושה לפי המטריקה מתלכד עם ההיקף המחושב לפי המטריקה האוקלידית (ה"רגילה")[20], ולכן הדבר "נראה לעין".

אין אנו מתיימרים לקבוע, חלילה, האם חוקים כגון אלו התקיימו בבית המקדש אם לאו. כל שרצינו להראות כאן הוא, שיתכנו מבחינה מתמטית מקרים שבהם היחס בין היקף עיגול לקוטרו הוא 3[21], ולכן דברי כשר אינם מוכרחים[22].

19. לא אלאה את הקורא בכל הפרטים. הקורא הבקי במתמטיקה יוכל להשלימם בנקל (שים לב שמטריקה זו מושרה על ידי נורמה, ולכן מספיק לבדוק עבור מעגל סביב הראשית, ולהסתפק בבדיקת ההתנהגות ברביע הראשון).

20. המטריקה האוקלידית מעל R^2 מוגדרת ע"י $\mathrm{Euc}((a,b),(c,d))=\sqrt{(a-c)^2+(c-d)^2}$.

21. ישנו תחום במתמטיקה שעוסק בהכללת מקרים כגון אלו. שמו "תיאוריית מינקובסקי עבור גופים

רשימת מקורות

[1] פילוסופיה של המדע, זאב בכלר, ספריית "אוניברסיטה משודרת", משרד הבטחון — הוצאה לאור.

[2] סוכה עגולה, דוד גרבר ובועז צבאן, מגל, חוברת י, המכון הגבוה לתורה, בר־אילן, טבת ה'תשנ"ד, עמ' 117–134.

[3] למאמר שלש בעיות הנדסיות, אסא כשר, סיני, מוסד הרב קוק, ה'תשכ"ג, עמ' צ"ב–צ"ד.

[4] שלש בעיות הנדסיות בתנ"ך ובתלמוד, מתתיהו הכהן מונק, סיני, מוסד הרב קוק, תמוז ה'תשכ"ב, עמ' רי"ח–רכ"ז.

[5] *"The Decomposition of Figures into Smaller Parts"*, V.G. Boltianskii, University of Chicago Press, Chicago 1980.

[6] *"Space, Time, and Spacetime"*, L. Sklar, University of California Press, Berkeley 1976.

מקורות לעיון נוסף

מקורות נוספים מובאים בגוף המאמרים הרשומים כאן.

* דרכיה של ההלכה בפתרון בעיות גאומטריות מיוחדות, מתתיהו הכהן מונק, הדרום, חוברת כ"ז, ניסן ה'תשכ"ח, עמ' 115–133.
* סוכה עגולה (ב), דוד גרבר ובועז צבאן, מגל, חוברת י"א, המכון הגבוה לתורה שע"י אונ' בר־אילן, אלול ה'תשנ"ה, עמ' 127–134.
* לעניין π אצל סוכה, דוד גרבר ובועז צבאן, דף שבועי מלימודי יסוד, אונ' בר־אילן (יופיע אי"ה לקראת סוכות ה'תשנ"ז).
* כוורת, בועז צבאן ודוד גרבר, המעין כרך ל"ה חוברת ג', ניסן ה'תשנ"ה, עמ' 57–69.
* כל שיש בהיקפו, בועז צבאן ודוד גרבר, הגיון חוברת ג', הוצאת אלומה, ירושלים, תשרי ה'תשנ"ו, עמ' 103–131.
* On the Rabbinical Approximation of π, Boaz Tsaban and David Garber, *Historia Mathematica*, (in press).

קמורים". ניתן לקרוא על כך בספר[5]. מקור זה קיבלתי מטל קובו, המחלקה למתמטיקה, אונ' הארוארד.

22. גם בפיסיקה המודרנית, היחס בין היקף עיגול לקוטרו יכול להיות שונה מ π. למשל, כאשר עיגול מסתובב סביב צירו (התופעה מקצינה ככל שהמהירות גדלה), או ליד מסות גדולות. כיון שאין זה התחום שבו עוסק כותב שורות אלה, תושאר הערה זאת בלא פירוט, בתקוה שאחד הקוראים יאיר את עינינו במאמר המשך.