מערך תרגול 9

201 – 88 תשע"ח סמסטר ב'

1 העתקת $Weingarten$

תזכורת 1

א. תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$. מגדירים את הנגזרת הכיוונית של f בנקודה $p\in\mathbb{R}^n$ בכיוון וקטור $v\in\mathbb{R}^n$ ע"י

$$\nabla_v f=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f\circ\alpha(t)$$

באשר $\alpha(t):\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ עקומה המקיימת $\alpha(0)=p,\ \ \alpha'(0)=v$. ההגדרה לא תלויה בבחירת העקומה.

ב. בהינתן פרמטריזציה רגולרית $x(u^1,u^2)$ של משטח M עם וקטור נורמל $n=n(u^1,u^2)$ ונקודה $p\in M\subseteq\mathbb{R}^3$, ניתן להרחיב את n לשדה וקטורי $N(x,y,z)$ המוגדר בסביבה פתוחה של p, במובן ש־ $n(u^1,u^2)=N(x(u^1,u^2))$.

ג. יהיו $p\in M$ ו־ $v\in T_pM$, ותהי $\beta=x\circ\alpha$ עקומה על המשטח M המקיימת $\beta(0)=p$ וכן $\beta'(0)=v$. הנגזרת הכיוונית $\nabla_v N$ מקיימת

$$\nabla_v N=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} n\circ\alpha(t)$$

ד. יהי $p\in M$. העתקת $Weingarten$ (אופרטור הצורה) היא האנדומורפיזם $W_p:T_p\to T_p$ המוגדר ע"י הנגזרת הכיוונית של השדה הוקטורי $N(x,y,z)$:

$$W_p(v)=\nabla_v N=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} n\circ\alpha(t)$$

בפרט

$$W(x_i)=n_i=\frac{\partial n}{\partial u^i}.$$

תזכורת 2 נסתכל על משטח שהוא הגרף של הפונקציה $f(x,y):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ותהי $p\in\mathbb{R}^2$ נקודה קריטית, כלומר $\nabla f=0$ שם. אז

א. המישור המשיק T_p הוא מישור אופקי.

ב. אם $det(H_f)<0$ אז p נקודת אוכף, ואם $det(H_f)>0$ אז p נקודת מינימום או מקסימום מקומי.

ג. אם חושבים על מטריצת ההסיאן H_f כעל העתקה לינארית $H_f:T_p\to T_p$ (אנדומורפיזם של המישור משיק האופקי) אז H_f בנקודה קריטית היא מקרה פרטי של העתקת ווינגרטן.

תרגיל 1 הגרף של הפונקציה $f(x,y)=3x+y+2$ הוא מישור. מיצאו את העתקת ווינגרטן של משטח זה.

פתרון 1 פרמטריזציה $x(u^1,u^2)=(u^1,-2-3u^1,u^2)$. נמצא נורמל:

$$n(u^1,u^2)=\frac{x_1\times x_2}{|x_1\times x_2|}$$

נחשב:

$$x_1=(1,-3,0)$$
$$x_2=(0,0,1)$$

לכן

$$x_1\times x_2=\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ 1 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=(-3,-1,0)$$

כלומר $x_1\times x_2$ קבוע לכן $n(u^1,u^2)=\frac{x_1\times x_2}{|x_1\times x_2|}$ קבוע. לכן בכל נקודה $p\in M$ ניתן להרחיב את n ל־N במובן שהוסבר לעיל, ואז N הוא שדה וקטורי קבוע המוגדר בסביבה פתוחה של p ב־ $\mathbb{R}^3$. לכן הנגזרת הכיוונית היא 0 לכל $v\in T_p$ כלומר $\nabla_v N\equiv 0$ כלומר $W_p(v)\equiv 0$.

תרגיל 2 מיצאו את העתקת ווינגרטן של הגליל $x(u^1,u^2)=(\cos u^1,\sin u^1,u^2)$.

פתרון 2 ראינו כי $n(u^1,u^2)=(\cos u^1,\sin u^1,0)$. נשים לב כי

$$\frac{\partial n}{\partial u^1}=(-\sin u^1,\cos u^1,0)=\frac{\partial x}{\partial u^1}=x_1.$$

כעת יהי $v = v^i x_i \in T_pM$. מלינאריות העתקת ווינגרטן ומ־ $W(x_i) = n_i = \frac{\partial n}{\partial u^i}$ מקבלים

$$\begin{aligned} W_p(v^i x_i) &= v^i W_p(x_i) \\ &= v^i n_i \\ &= v^1 n_1 + v^2 n_2 \\ &= v^1 x_1 + v^2 \cdot 0 = v^1 x_1 \end{aligned}$$

בפרט,

$$W_p(x_1) = x_1 \qquad W_p(x_2) = 0.$$

2 מדידת שטח על משטחים

תזכורת 3 השטח של המשטח D הנתון ע"י פרמטריזציה $x : U \to \mathbb{R}^3$ הוא

$$area(D) = \int_U \sqrt{det(g_{ij})} du^1 du^2$$

תרגיל 3 נסתכל על ספירה מרדיוס ρ שמרכזה בראשית הצירים. חשבו את השטח של התחום D של הספירה המוכל באוקטנט הראשון (כלומר כל הקואורדינטות הקרטזיות חיוביות).

פתרון 3 מאינפי' 3 אנחנו יודעים כי $dA = \rho^2 \sin\phi d\theta d\phi$ כלומר

$$\int_D dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \sin\phi d\theta d\phi = \rho^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \right) d\phi = \rho^2 \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi d\phi = \rho^2 \frac{\pi}{2}$$

כי $z \geq 0$ משמעו $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$, ו־ $x \geq 0, y \geq 0$ משמעו $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

נוודא פתרון זה גם באמצעות הנוסחה $area(D) = \int_U \sqrt{det(g_{ij})} du^1 du^2$:

המשטח הוא $x(\theta, \phi) = (\rho \sin\phi \cos\theta, \rho \sin\phi \sin\theta, \rho \cos\phi)$ עבור $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, לכן המטריקה היא

$$\begin{aligned} x_\theta &= (-\rho \sin\phi \sin\theta, \rho \sin\phi \cos\theta, 0) \\ x_\phi &= (\rho \cos\phi \cos\theta, \rho \cos\phi \sin\theta, -\rho \sin\phi) \\ (g_{ij}) &= \begin{pmatrix} \rho^2 \sin^2\phi & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ומתקיים

$$\sqrt{det(g_{ij})} = \sqrt{\rho^4 \sin^2 \phi} = \rho^2 \sin \phi$$

כלומר קיבלנו את אותה הנוסחה.

תרגיל 4 הראו כי אם המטריקה (g_{ij}) שקולה קונפורמית למטריקה שטוחה סטנדרטית עם גורם קונפורמי $\lambda > 0$ אז אלמנט השטח הוא $dA = \lambda du^1 du^2$.

פתרון 4 נתון $g_{ij} = \lambda \delta_{ij}$ לכן

$$dA = \sqrt{det(g_{ij})} du^1 du^2 = \sqrt{det(\lambda \delta_{ij})} du^1 du^2 = \sqrt{\lambda^2} du^1 du^2 = \lambda du^1 du^2$$