

דף תרגילים 9

201 – 88 תשע"ח סמסטר ב'

תרגיל 1 להזכירכם הנגזרת הכיוונית של $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ בנקודה $p \in \mathbb{R}^n$ בכיוון וקטור $v \in \mathbb{R}^n$ היא $\nabla_v f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ \alpha(t)$ כאשר $\alpha(t)$ עקומה המקיימת $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$. הראו כי אם α מתארת קו ישר בכיוון וקטור v עם $\alpha(0) = p$ אז מתקבלת ההגדרה של נגזרת כיוונית מאינפי' 3:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+hv) - f(p)}{h}$$

תרגיל 2

א. הראו כי הנורמל למשטח $ax + by + cz + d = 0$ ($a^2 + b^2 + c^2 > 0$) הוא

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

ב. הסיקו כי העתקת ווינגרטון של המישור $ax + by + cz + d = 0$ היא העתקת האפס.

תרגיל 3 נתון המשטח המוגדר ע"י המשוואה

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 4\}$$

חשבו את העתקת ווינגרטון של M .

תרגיל 4 נתונה הפונקציה $f(x, y) = 6x^2 + 8xy + 2y^2$.

א. חשבו את העתקת ווינגרטון של הגרף של הפונקציה f בנקודה $p = (0, 0, 0)$.

ב. כיצד נראה המשטח בנקודה $p = (0, 0, 0)$?

תרגיל 5 נתון המשטח $M \subseteq \mathbb{R}^3$ עם פרמטריזציה $x : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ כאשר $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$,

עם המטריקה $(g_{ij}) = \frac{1}{y^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. חשבו את האורך (במידה וקיים) של העקומות $\beta_i = x \circ \alpha_i$ במקרים הבאים:

א. $\alpha_1(t) = (\cos t, \sin t)$ כאשר $t \in [\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$.

ב. $\alpha_2(t) = (\cos t, \sin t)$ כאשר $t \in [0, \pi]$.

ג. $\alpha_3(t) = (1, t)$ כאשר $t \in (0, 1)$.

שימו לב כי יתכן ותקבלו אורך אינסופי עבור חלק מהעקומות.

ד. חשבו את השטח של פרמטריזציה x בתחום D , כאשר

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), x^2 + y^2 > 1, y > 0 \right\}$$

תרגיל 6 נתבונן במשטח $M \subseteq \mathbb{R}^3$ המוגדר ע"י

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 1\}$$

א. מוצאו פרמטריזציה של עקומה $\alpha(s)$ במהירות יחידה במישור xz כך ש- M משטח סיבוב (סביב ציר z) של α .

ב. מוצאו את הפרמטריזציה $x(\theta, \phi)$. חשבו את התבנית היסודית הראשונה של הפרמטריזציה שמצאתם.

ג. חשבו את השטח הכולל של המשטח M :

$$area(M) = \int_M dA$$

תרגיל 7 נתבונן במשטח M שהוא ספירה ב- \mathbb{R}^3 בעלת רדיוס 5 שמרכזה בראשית הצירים. יהי $-5 < a < 5$. נסמן γ_a עקומת החיתוך של M ושל המישור $\{z = a\}$.

א. מוצאו פרמטריזציה מהירות יחידה של γ_a .

ב. עבור איזה ערך של a העקומה γ_a היא עקומה גאודזית של M ?

ג. נסתכל על העקומה γ_3 . מוצאו ספירה $S \subseteq \mathbb{R}^3$ כך ש- γ_3 עקומה גאודזית על S .