

דף תרגילים 13

201 – 88 תשע"ח סמסטר ב'

תרגיל 1 נסתכל על משטח הסיבוב של העקומה $\alpha(\phi) = (\cosh \phi, 0, \phi)$ עבור $\phi \in \mathbb{R}$.

א. חשבו את עקמומיות גאוס בכל נקודה (כדאי להעזר באופרטור לפלס בלטרמי).

ב. חשבו את עקמומיות גאוס הכוללת של המשטח.

תרגיל 2 חשבו את עקמומיות גאוס הכוללת של משטח הסיבוב של העקומה $\alpha(\phi) = (\phi, 0, \phi^2)$ עבור $\phi \in [0, \infty]$.

תרגיל 3 יהי $\rho > 0$ ותהי

$$f(x, y) = \frac{1}{1 + \frac{\rho}{4}(x^2 + y^2)}$$

חשבו את עקמומיות גאוס של המטריקה $g_{ij}(x, y) = f^2(x, y)\delta_{ij}$.

תרגיל 4 יהי $M \subset \mathbb{R}^3$ משטח מוגדר ע"י גרף של $z = f(x, y)$ כאשר $f(x, y) = 3x^2 + 8xy - 3y^2$. יהי (e_1, e_2, e_3) הבסיס הסטנדרטי של \mathbb{R}^3 .

א. מוצאו מטריצת הסיאון H_f של f בראשית הצירים.

ב. יהיו λ_i (כאשר $i = 1, 2$) ערכים עצמיים של H_f . יהי v_i וקטור עצמי במישור (x, y) השייך לערך עצמי λ_i . נגדיר מישור $E_i \subset \mathbb{R}^3$ ($i = 1, 2$) הנפרש ע"י e_3 ו- v_i . נגדיר עקומה $\gamma_i \subset \mathbb{R}^3$ ע"י $\gamma_i = M \cap E_i$.

מוצאו את העקמומיות המסומנת של כל אחת מהעקומות γ_i בראשית הצירים.

ג. חשבו את העתקת ווינגרטון של M בראשית הצירים ואת עקמומיות גאוס של M בראשית הצירים.

ד. חשבו את העקמומיות הממוצעת של M בראשית הצירים.

תרגיל 5 יהי $C > 0$ ותהי פונקציה המקיימת

$$f(0,0) = 0, \quad f(x,y) \geq C(x^2 + y^2).$$

א. למצוא חסם תחתון לכל ערך עצמי של ההסיאן של f בראשית הצירים.

ב. למצוא חסם תחתון לעקמומיות גאוס של הגרף של f בראשית הצירים.

תרגיל 6

א. תהי $C \subset \mathbb{R}^2$ עקומת ז'ורדן רגולרית. להראות שבנקודה של C הקרובה ביותר לראשית הצירים הרדיוס-וקטור הוא מאונך לוקטור המשיק.

ב. יהי M משטח סגור ב- \mathbb{R}^3 . נניח שנקודה P על M הרחוקה ביותר מראשית הצירים. מיצאו סימן של עקמומיות גאוס של M בנקודה P .