בס"ד

גיאומטריה אקסיומתית –הרצאה 3

מעכת אקסיומות

במערכת אקסיומות יש עצמים ויחסים בלתי מוגדרים, ואקסיומות הנותנים את התכונות שלהם. *למשל*, לגיאומטריה אפינית, יש שני קבוצות: נקודות וישרים. יש שני יחסים: "על". הנה קבוצה של אקסיומות:

A.1 על כל שתי נקודות שונות יש לפחות ישר אחד.

A.2 על כל שני נקודות אין יותר ישר אחד.

הגדרה: ישרים כך שאין נקודה על שניהם נקראים *מקבילים*. נציין $m \parallel n$ אם צתמ מקבילים או שווים.

A.3 אם נקודה P לא על ישר m, יש ישר יחיד על P מקביל ל- m

A.4 יש לפחות שתי נקודות על כל ישר

A.5 יש לפחות שלוש נקודות שאינם על ישר אחד

המישור האוקלידי מקיים את האקסיומות האלו.

משפט: היחס $\parallel$ הוא יחס שקילות.

הוכחה: רפלקסיביות וסימטריות לפי ההגדרה. נוכיח טרנסיטיביות. נניח $\ell \parallel m, m \parallel n$. ר"ל $\ell \parallel n$.
אם שניים מהם שווים התוצאה טריביאלית, ולכן ננחי שכולם שונים. הוכחה בדרך השלילה. נניח שלא מתקיים $\ell \parallel n$. אז יש נקודת חיתוך P, לפי ההגדרה של מקביל. הנחנו ש- $\ell \neq n$ ו- $\ell \parallel m, m \parallel n$. זה סתירה לאקסיומה A.3. מש"ל

דוגמה: גיאומטריה אפינית של ארבע נקודות. ארבע נקודות A, B, C, D. שישה ישרים:
AB, AC, AD, BC, BD, CD

משפט: אם בגיאומטריה אפינית יש ישר שיש עליו בדיוק שתי נקודות, אז הוא איזומופית לדוגמש של הארבע נקודות.

המישור האוקלידי המורחב

אם ℓ, ℓ' שני ישרים שונים במישור הוקלידי E. אז $\ell \parallel \ell'$ או $\ell \cap \ell' \neq \phi$, ויש נקודת חיתוך יחידה. במישור הפרויקטיבי, כל שני ישרים נחתכים בנקודה אחת. לכן, לכל מחלקת שקילות $[\ell]$, נוסיף נקודה ℓ_∞ להיות הנקודה המשותפת של כל הישרים במחלקה. אם $\ell \parallel m$, אז $\ell_\infty = m_\infty$.

הגדרה: נגדיר $\overline{E}$ להיות המישור האוקלידי המורחב

1) הנקודות הן הנקודות האידיאליות והנקודות הרגילות
2) הישרים הם הישרים הרגילים וישר אחד של כל הנקודות האדיאליות.

משפט: במשור האוקלידי המורחב, כל שני ישרים נפגשיפ בנקודה אחת ויחידה.
משפט: במישור האוקלידי המורחב, פרספקטיבה הוא העתקה חד-חד ערכית ועל.