חשבון אינפיניטיסימלי 3-תרגיל 2

שאלה 1. יהי (X,d) מרחב מטרי. הראו כי עבור $x_1,\dots,x_n\in X$ הקבוצה $X\setminus\{x_1,\dots,x_n\}$ היא פתוחה.

שאלה 2. יהי $(\mathbb{R}^2,d_2)$ מרחב מטרי עם המטריקה האוקלידית, $A,B\subseteq X$ פתוחות ו-$x\in\mathbb{R}^2$ כלשהו. עבור $\alpha\in\mathbb{R}$, הוכיחו כי הקבוצות הבאות פתוחות:

(1) $x+A:=\{x+a\mid a\in A\}$.

(2) $A+\alpha B:=\{a+\alpha b\mid a\in A, b\in B\}$.

שאלה 3. יהיו $x,y\in\mathbb{R}^2$ בת"ל ויהיו $(a,b),(c,d)\subseteq\mathbb{R}$ שני קטעים פתוחים. הראו כי הקבוצה,

$$(a,b)x+(c,d)y:=\{tx+sy\mid [t\in(a,b)]\&[s\in(c,d)]\}$$

פתוחה.

שאלה 4. יהי $A\in M_2(\mathbb{R})$ מטריצה הפיכה ו-U פתוחה ב-$\mathbb{R}^2$, אזי

$$AU:=\{au\mid u\in U\}$$

פתוחה.

שאלה 5. תהי $K\subseteq\mathbb{R}^2$ קומפקטית. יהי $\{A_i\}_i\in I$ אוסף של קבוצות סגורות שאיחודן הוא K, כך שחיתוך של כל תת-אוסף סופי הוא לא ריק. הראו כי,

$$\bigcap_{i\in I}A_i\neq\emptyset.$$

שאלה 6. יהי (X,d) מרחב מטרי, ותהיינה $A,B\subseteq X$. הוכיחו או הפריכו את הבאים:

(1) $\mathrm{cl}(A\cap B)\subseteq\mathrm{cl}(A)\cap\mathrm{cl}(B)$.

(2) $\mathrm{cl}(A\cap B)\supseteq\mathrm{cl}(A)\cap\mathrm{cl}(B)$.

(3) $\mathrm{int}(A\cup B)\subseteq\mathrm{int}(A)\cup\mathrm{int}(B)$.

(4) $\mathrm{int}(A\cup B)\supseteq\mathrm{int}(A)\cup\mathrm{int}(B)$.

שאלה 7. נגדיר $A:=\{(0,x_2,\dots,x_n)\mid x_i\,\mathbb{R}\}$. הוכיחו את הבאים:

(1) הראו ש-A סגורה.

(2) הראו ש-$\mathrm{int}(A)=\emptyset$.

שאלה 8 (אתגר)**.** יהי $(\mathbb{R}^n,d_2)$ מרחב מטרי עם הנורמה האוקלידית. עבור $A\subseteq\mathbb{R}^n$ נאמר כי $A\subseteq\mathbb{R}^n$ קמורה, אם לכל $a,b\in A$ לכל $t\in[0,1]$ מתקיים כי $ta+(1-t)b\in A$. נאמר כי A סימטרית מסביב ל-0, אם לכל $a\in A$ מתקיים $a\in A$. הראו כי אם A פתוחה, קמורה, חסומה וסימטרית ביחס ל-0 אזי הפונקציה,

$$\|v\|_A:=\inf\{k>0\mid \frac{x}{k}\in A\}$$

מגדירה נורמה על $\mathbb{R}^n$ ומתקיים $A=B(0,1)$ ביחס לנורמה $\|\cdot\|_A$.

בהצלחה!