שאלון בחינה: גיאומטריה דיפרנציאלית ואנליטית (88-201)
שם המרצה: פרופ' מיכאל כץ
סמסטר ב', מועד א' : 28.07.17

<u>יש לנמק ולהצדיק את כל התשובות. שאלון סגור.</u>

<u>משך הבחינה: שלוש שעות.</u> כל אחת מ-5 שאלות הבאות שווה 20 נקודות. שאלת בונוס שווה 8 נקודות.

1. הוכח את משפט egregium של Gauss : תהי K עקמומיות של Gauss של משטח $M \subseteq \mathbb{R}^3$ המוגדרת כדטרמיננטה של העתקת Weingarten W_p בנקודה $p \in M$. אזי ניתן לבטא K באמצעות מקדמי התבנית היסודית הראשונה ונגזרותיה לסדר המתאים.

2. נתונה תבנית ריבועית $Q(x,y) = -3x^2 + 4xy - 6y^2$
   א. עקומה מישורית מוגדרת ע"י המשוואה $Q(x,y) = -1$. לאפיין את העקומה.
   ב. לאפיין את המשטח המתקבל כ-גרף של התבנית הריבועית $z = Q(x,y)$ ולמצא את עקמומיות גאוס של הגרף בראשית.

3. מצא נקודה או נקודות (אם קיימות) של עקמומיות מקסימלית על העקומה הבאה במישור (x,y):
   א. עקומה $x + y^2 = 1$.
   ב. עקומה $xy + 1 = 0,\ x > 0$.
   ג. עקומה $x + \ln y = 0$.

4. יהי M משטח עם פרמטריזציה $x(u,v)$.
   א. הוכיחו שאם הקואורדינאטות הן איזותרמיות עם פונקציה f , אז מתקיים $\Delta x = -2f^2 H\vec{n}$, כאשר Δ הוא האופרטור הלפלסיאן, H היא העקמומיות הממוצעת של המשטח ו- $\vec{n}$ הוא וקטור הנורמל למשטח.
   ב. הוכיחו שמשטח הסיבוב של העקומה $x = \cosh z$ הוא משטח מינימלי.
   ג. הוכיחו שהמשטח הבא הוא משטח מינימלי: $X(u,v) = \left(u, v, \ln\left(\frac{\cos u}{\cos v}\right)\right)$.

5. הביטוים הבאים משתמשים בסימון סכימה של Einstein . עבור כל אחד מהביטוים, לקבוע איזה אינדקסים הם אינדקסים חופשיים ואיזה מהם הם אינדקסי סכימה, ולבטא באמצעות מקדמים Γ_{ij}^{ℓ}, L_{ij}, וכו' ולפשט ככל האפשר את הביטויים הבאים:
   א. $\left\langle x_j, x_{pq} \right\rangle g^{jp}$.
   ב. $\left\langle x_{pq}, n_s \right\rangle \delta_m^q$.
   ג. $g_{pq}\, \delta_s^q\, g^{st}\, \delta_t^p$.

6. (שאלת בונוס) תהי $C \subseteq \mathbb{R}^2$ עקומת Jordan שעבורה קיימת פרמטריזציה רגולרית בסביבה של כל נקודה. הוכח שבנקודה של C הקרובה ביותר לראשית, וקטור-מיקום הוא מאונך לוקטור המשיק.

Solutions to exam in 88-201 moed A july '17

Problem 1. The proof of the *theorema egregium* can be found in the choveret of the course at http://u.math.biu.ac.il/~katzmik/egreglong.pdf in sections 10.5 - 10.7 on pages 116-120 (the section and page numbers may change in the future as the choveret is edited).

Problem 2.
(a) To determine the conic one can either complete the square, or diagonalize the matrix of coefficients using eigenvalues and eigenvectors. One then applies Theorem 2.6.1 an its corollaries on page 28 of the choveret, or Theorem 3.1.1 on page 31 of the choveret (the theorem number and page number may change in the future as the choveret is edited).

(b) Once the quadratic form is diagonalized, we recognize the standard equation of a paraboloid as described in Definition 3.6.2 on page 35 (the numbers may change as the choveret is edited in the future). To find the Gaussian curvature we first prove that the point is a critical point, and then apply Theorem 3.10.3 on page 41 to compute the curvature via the Hessian.

Problem 3. Find the maximum of the curvature of a curve as in choveret sections 4.8-4.12 on pages 49-53 (page numbers may change in the future as the choveret is edited).

Problem 4.
(a) The formula relating the Laplacian to the mean curvature in isothermal coordinates is proved in choveret Section 10.3 on pages 113-114 (the numbers may change in the future as the choveret is edited).

(b) The minimality of the catenoid is proved in choveret Theorem 10.4.4 on page 115 (the numbers may change as the choveret is edited in the future).

(c) The minimality of the Scherk surface is proved in choveret Theorem 10.2.3 in Section 10.2 on pages 111-113 (the page numbers may change as the choveret is edited in the future).

Problem 5. Numerous examples of simplification of formulas in Einstein index notation were treated both in class and the exams from previous years. Make sure also to classify the indices as being either *free* indices or *summation* indices.

Problem 6. Parametrizing the curve by $\alpha(t)$ we note that at the point closest to the origin one has $\left\langle \alpha(t), \alpha(t) \right\rangle' = 0$ by calculus. Applying Leibniz rule we obtain $\left\langle \alpha'(t), \alpha(t) \right\rangle = 0$. Therefore the tangent vector $\alpha'(t)$ is orthogonal to the position vector $\alpha(t)$.