מבוא ללוגיקה מתמטית

על פי רשימות של פרופסור חיים יהודה ופרופסור מרטין גולדשטרן

מהדורה שלישית מתוקנת

בועז צבאן, המחלקה למתמטיקה, אוניברסיטת בר־אילן

כ"ט בניסן, תשס"ד
20 באפריל 2004

תוכן עניינים

הקדמה

ספר זה מהווה קורס בסיסי בלוגיקה מתימטית, והוא מתאים לקורס בן שנים עשר מפגשים אינטנסיביים של שתי שעות אקדמיות (או מפגשים נינוחים של שלוש שעות אקדמיות), לא כולל תרגיל.

הקורס מבוסס על רשימות של חיים יהודה ומרטין גולדשטרן, אולם הוא מכסה רק חלק מהמובא בספרם המקיף The Incompleteness Phenomenon (פורסם בהוצאת A.K. Peters). מומלץ לכל בוגר של קורס זה לרכוש את הספר הנ"ל ולקראו עד תום.

רוב העבודה על הספר נעשתה עוד בהיותי תלמיד לתואר שני של חיים יהודה. סיום העבודה נדחה, מפני אילוצים שונים, עד לאחר סיום שירות צבאי בן שש שנים ועבודת דוקטוראט... ברוך ה' שזכינו לברך על המוגמר.

במקום מבוא, ברצוני להעיר הערה אחת. משמעות המושג "הוכחה" בלוגיקה מתימטית שונה מאד ממשמעותו בחיי היום־יום. בעוד שההוכחה הלוגית עוסקת בהיסק (לוגי) מתוך הנחות יסוד נתונות, הרי שהוכחה במובן היום־יומי היא מושג הקרוב יותר ל"שיכנוע", והיא לעתים קרובות עוסקת דווקא באמיתותן של אותן "הנחות יסוד". הוכחה "יום יומית" עשויה להשתמש בלוגיקה בחלק מטיעוניה, אולם היא עשויה להשתמש גם בפניה אל האינטואיציה והרגש, וכן להסתמך על הניסיון. אין פסול עקרוני בכך (מדעים רבים משתמשים בסוג זה של הוכחות והצלחתם אינה מוטלת בספק), אולם אין הלוגיקה המתימטית עוסקת בסוג זה של הוכחות, לא משום שהוא שנוי במחלוקת ומסקנות המושגות דרכו עלולות להתברר כשגויות, אלא משום שלא ניתן לנתחו מבחינה מתימטית.

תודתי נתונה לפרופסור עזריאל לוי, סיני ועוקר הרים ותיק בתחום, על הערותיו החשובות לגירסה קודמת של ספר זה. אנצל במה זו לאחל לו אריכות ימים ושנים של תרומה למדעים ולחינוך. ספר זה מוקדש לו.

איני משלה את עצמי שהספר נקי מטעויות. נודה לקוראים שיעירו לנו על טעויות, לתיבת הדואר האלקטרוני שלנו: tsaban@math.biu.ac.il

בועז צבאן, בר־אילן ה'תשס"ג

חלק I

לוגיקת תחשיב הפסוקים

פרק 1

אינדוקציה ושפת תחשיב הפסוקים

אינדוקציה היא הכלי העיקרי בהוכחת משפטים בלוגיקה מתמטית. הדרך הטובה ביותר לקבלת אינטואיציה באשר להוכחות אינדוקטיביות, היא לעיין במספר דוגמאות. נתחיל פרק זה בדוגמה הקרובה לניסיון היומיומי שלנו, ולאחריה מספר דוגמאות מתמטיות. באמצע הפרק, נכונן את עקרון האינדוקציה בעזרת הגדרת מבניס אינדוקטיביים. בסיום פרק זה נראה, שהשפה הרגילה עבור לוגיקה פסוקית היא מבנה אינדוקטיבי.

1.1 דוגמא. *לכל איש יש שם.*

מתחילים בעובדה שלכל אחד, פרט לאדם וחווה, יש הורים.
הורים עם שמות נותנים שם לילדם.
לאדם וחווה היו שמות.
לכן, מסיקים כי לכל אדם שחי אי־פעם יש שם.
אחרת, יהי איש האיש הראשון ללא שם.
איש הוא לא אדם או חווה, שלהם יש שמות, לכן לאיש יש הורים.
להוריו של איש יש שמות, כי הרי איש הוא האיש הראשון ללא שם.
אבל לפי ההנחה, ההורים בהכרח נתנו שם לאיש. לכן, לא יתכן שלאיש אין שם.
לכן, לא יתכן שהיה איש ראשון ללא שם, ומכאן שלכולם יש שם.

בדוגמה הקודמת השתמשנו בהנחה חזקה לגבי המציאות, והיא שהתנאים ההתחלתיים קובעים את עתיד המערכת לנצח. ברור כי מערכות כאלה אינן קיימות במציאות, אך במתמטיקה אנו עוסקים באובייקטים אידאליים, שאינם נתונים לכל השפעות חיצוניות או להשפעות הזמן.

האובייקטים המתמטיים הראשונים היו המספרים:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$$

מהם המספרים הטבעיים? זאת שאלה טובה ומעניינת. הדבר הראשון שניתן לומר, הוא כי אין זו שאלה מתמטית, אלא שאלה פילוסופית בקשר למתמטיקה. כתמיד בפילוסופיה, ישנן דעות סותרות באשר לטבעם של המספרים הטבעיים, ודעות אלה מושפעות רבות מהעמדות שיש לפילוסופים לגבי קיום אובייקטים במציאות. נזכיר מספר מעמדות אלה, ללא הרחבות נוספות:

1. המספרים הם אובייקטים קונקרטיים בעולם של רעיונות.
2. המספר 5 לדוגמא, הוא מה שיש לכל האובייקטים בעלי 5 מרכיבים במשותף.
3. המספר 5 הוא מושג אנושי, המשמש לתקשורת.

האם יש אינסוף מספרים? שוב, זוהי שאלה פילוסופית. בדרך כלל מובא הטיעון הבא כדי "להוכיח" שיש אינסוף מספרים:

> נניח שאין אינסוף מספרים. לכן חייב להיות המספר הגדול ביותר, שנקרא לו n. אזי $n+1$ גדול מ n, סתירה.

יש מספר בעיות עם טיעון זה. כדי להבין את הבעיה הראשונה, הבה נכנה מספר n בשם "ניתן להבנה", אם ביכלתנו לתאר לעצמנו מישהו בעל n דולרים.

לכן, 5 הוא מספר ניתן להבנה, $10,000$ ניתן להבנה, ואפילו 10^9, אלף מליון (מיליארד) ניתן להבנה. מה באשר ל 10^{12} ? ומה באשר ל $n+1$ כאשר n הוא הערך הכולל של כל הרכוש שיש למישהו עלי אדמות? ואם זה עדיין ניתן להבנה, האם 10^{100} ניתן להבנה? $10^{10^{100}}$?

היקום, כפי שהוא מוכר לנו, הוא סופי. אז כיצד יתכן שיש אינסוף מספרים?

הבעיה השניה היא כדלקמן: גם אם נסכים שלכל מספר n, ישנו מספר $n+1$, האם זה אומר שהישות האינסופית של כל המספרים קיימת? נניח שברצוננו ליצור רשימה של כל המספרים. אפילו אם ידוע לנו, שבכל פעם שאנו כותבים את המספר n, ישאר מקום עבור המספר $n+1$ (וכן זמן לכתוב אותו), האם זה אומר שאי־פעם תהיה בידינו הרשימה המלאה?

נוכל להמנע מכל הדיון הזה אם נשתמש בשיטה האקסיומטית, ונסכים שהמספרים הטבעיים הם כל עולם של אובייקטים ופעולות המספק את רשימת האקסיומות שלנו.

למטרתנו נניח שלקורא יש אינטואיציה טובה באשר למספרים הטבעיים ולפעולות החיבור, הכפל, החזקה, והיחס $<$.

רק נשים לב שהביטוי 3 קטן מ 5 $(3<5)$ הוא אמת אם 3 ו 5 הם במשמעותם הרגילה (ברור כי ייתכן שתלך לשוק לקנות 5 ק"ג תפוחים, וכשתחזור הביתה יהיו לך רק 3. זו לא הוכחה ש 3 ו 5 שווים).

נכתוב $\mathbb{N}$ עבור קבוצת המספרים הטבעיים, כולל 0, זאת אומרת $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

2.1 דוגמא. הראה כי לכל $n > 0$ מתקיים:

$$(*) \qquad (1+2+\cdots+n) = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

הוכחה. באינדוקציה על n.
שלב ראשון: $n = 1$. הסכום בצד שמאל מכיל רק את 1, והביטוי בצד ימין אף הוא 1:

$$1 \cdot (1+1)/2 = 1$$

שלב שני: $n = k+1$. נניח שכבר ידוע לנו כי: $1 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$. עלינו להראות כי:

$$(1 + \cdots + k + (k+1)) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

אז נתחיל ב:

$$(1 + \cdots + k + (k+1)) = (1 + \cdots + k) + (k+1)$$

כבר ידוע לנו שהמחובר הראשון שווה ל $\frac{k(k+1)}{2}$, ולכן מקבלים:

$$= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + \frac{(k+1)2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

וסיימנו. □

מדוע הושלמה ההוכחה?
אם $(*)$ אינו נכון לכל n, אז חייב להיות מספר ראשון n, שעבורו $(*)$ לא מתקיים. אבל כרגע הראנו שלא יכול להיות כזה "מספר ראשון": n לא יכול להיות 1, לפי השלב הראשון, ואם $n > 1$, אז $(*)$ חייב להתקיים עבור $n-1$. בשלב השני ראינו שמכאן נובע ש $(*)$ חייב להתקיים גם עבור n.

3.1 דוגמא. לכל מצולע קמור בעל $n \geq 3$ קודקודים, יש בדיוק $\frac{n(n-3)}{2}$ אלכסונים.

הוכחה. כאן השלב הראשון הוא עבור $n = 3$. במקרה זה המצולע הוא משולש, ואין לו אלכסונים, וזה גם מה שאומרת הנוסחה.
כעת, נניח כי הנוסחה נכונה עבור מצולע בעל n קודקודים. בהנתן מצולע קמור בעל $n+1$ קודקודים, נשתמש ב"הנחת האינדוקציה" בדרך הבאה: ניקח תת קבוצה של n קודקודים, ונחבר אותם (ע"י אלכסון אחד מהמצולע המקורי) כך שיתקבל מצולע סגור. למצולע זה $\frac{n(n-3)}{2}$ אלכסונים, שכולם גם אלכסונים של המצולע המקורי. בנוסף, אחת הצלעות של מצולע זה היא אלכסון במצולע המקורי. לסיום עלינו להוסיף עוד $n-2$ אלכסונים היוצאים מהקודקוד הנוסף לכל אחד משאר הקודקודים פרט לשני שכניו. הסכום הכללי הוא לכן:

$$\frac{n(n-3)}{2} + 1 + (n-2) = \frac{(n+1)(n-2)}{2}$$

□

הדוגמאות לעיל הינן הוכחות אינדוקטיביות אופייניות במתמטיקה. ניתן להשתמש בטיעון זה באופן כללי, כדי להראות שלכל המספרים הטבעיים יש תכונה מסויימת P. הדבר מתבצע בדרך הבאה:

(א) הראה כי המספר 0 הוא בעל התכונה P.

(ב) השתמש בהנחה ש k בעל התכונה P כדי להראות ש $k+1$ בעל התכונה P.

(ג) הסק מ (א) ומ (ב) שכל המספרים הטבעיים הם בעלי התכונה P.

מדוע אנו מקבלים את (ג)? משום שהאינטואיציה המתמטית אומרת שניתן "לייצר" אותם בצורה הבאה:
ראשית, יש לנו את המספר 0 (לפי (א), 0 מקיים את התכונה P).
מ 0 אנו יכולים לעבור למספר $0+1(=1)$ (לפי (ב) והאמור לעיל, גם 1 מקיים את התכונה P).
מ 1 אנו יכולים לעבור למספר $1+1(=2)$ (לפי (ב) והאמור לעיל, גם 2 מקיים את התכונה P).
מ 2 אנו יכולים לעבור למספר $2+1(=3)$ (לפי (ב) והאמור לעיל, גם 3 מקיים את התכונה P).

$$\vdots$$

מ k אנו יכולים לעבור למספר $k+1(=k+1)$ (לפי (ב) והאמור לעיל, גם $k+1$ מקיים את התכונה P).

$$\vdots$$

מהתבוננות בתהליך זה של "ייצור מספרים", אנו יכולים לראות שהוכחה אינדוקטיבית היא סכמטיזציה של תהליך אינסופי שמתחיל מ 0 וממשיך דרך כל המספרים הטבעיים.

הנקודה היא, שניתן לראות תיאור זה של המספרים הטבעיים כך: מתחילים בהנחת קיום 0 והפעולה $+1$ (במשמעות "להוסיף 1"). אנו אומרים ש n הוא מספר טבעי אם:

(א) n הוא 0, או

(ב) יש מספר טבעי m כך ש $n=m+1$.

אנו יכולים לראות שבתהליך זה מעורבים שני גורמים: "0" הוא אובייקט נתון מראש, והוא הבסיס שממנו אנו בונים את כל שאר המספרים, שנוצרים מ "0" על ידי הפעלת התהליך "הוספת 1" שוב ושוב. תהליך זה של "הוספת 1" הוא הגורם השני שמעורב בהצגה זאת של המספרים הטבעיים. גם תהליך זה נתון מראש, וניתן לחשוב עליו כעל ה"שיטה" לקבל אובייקט חדש מאובייקט נתון. "שיטות" כאלה מתוארות בדרך כלל על ידי פונקציות.

נקודת השקפה מופשטת על מצב זה נותנת לנו את המונחים הבאים, שיהיו המרכיב העיקרי בכל תהליכי הבניה המתמטיים שלנו:

1. בלוקים: אלו האובייקטים הנתונים מראש (כמו האובייקט "0" בדוגמא הנ"ל).

2. פעולות: אלו השיטות הנתונות מראש ומשמשות לייצור אובייקטים חדשים מאובייקטים שנוצרו קודם (כמו "הוספת 1" בדוגמא הנ"ל).

כעת אנו מניחים שיש לנו קבוצה B של בלוקים וקבוצה K של פעולות.
מה אנו יכולים לעשות עם B ו K? אנו רוצים ליצור אוסף של אובייקטים על ידי שימוש באברי B ובפעולות מ K. האובייקטים הראשונים יהיו האובייקטים

מ B. כעת אנו יכולים להפעיל פעולות מ K על אברי B לקבלת אובייקטים חדשים. אחר כך אנו יכולים להפעיל את הפעולות מ K על אובייקטים חדשים אלה לקבלת עוד אובייקטים. אנו יכולים להמשיך תהליך זה "לנצח", לקבלת אוסף של איברים שיסומן $C(B,K)$.

להדגמת בניה זאת, נגדיר את הפעולה הבאה:

$$\begin{aligned} s: \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto s(n) = n+1 \end{aligned}$$

הפונקציה s נקראת פונקציית העוקב. כעת, אם $B=\{0\}$ ו $K=\{s\}$, אזי $\mathbb{N}=C(B,K)$.

ניתן שתי דוגמאות נוספות של מבנים אינדוקטיביים:

4.1 דוגמא. נתבונן בקבוצה בת שני אברים $B=\{a,b\}$. תהי D אוסף כל הסדרות הסופיות של אברים מ B. תהיינה

$$\begin{aligned} f: D &\to D \\ x &\mapsto f(x) = axa \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g: D &\to D \\ x &\mapsto g(x) = bxb \end{aligned}$$

אזי $C(B,K)$ הוא קבוצת כל הסדרות מאורך איזוגי, שהן תמונת המראה של עצמן (פלינדרומים).

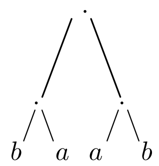
5.1 דוגמא. שוב קבוצת הבלוקים שלנו תהיה קבוצת שני האברים $\{a,b\}$. נתבונן בסדרות סופיות שמכילות את a, b, $.$, ואת הסוגריים המרובעים $[,]$. הפעולה היחידה שלנו היא הפונקציה הדו־מקומית f המוגדרת על ידי

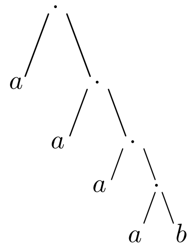
$$f(x,y) = [x.y]$$

להלן דוגמאות של אברים ב $C(\{a,b\},\{f\})$:

$$a$$
$$b$$
$$[a.b]$$
$$[a.a]$$
$$[[b.a].[a.b]]$$
$$[a.[a.[a.[a.b]]]]$$

לעיתים, כשאנו עוסקים במבנה אינדוקטיבי, נוח לנו לזהות כל איבר של $C(B,K)$ עם עץ התחביר שלו. לא נפרמל מושג זה, אך ניתן מספר דוגמאות. עצי התחביר של שני האובייקטים האחרונים מדוגמא 5.1 נתונים על ידי איור 1.1.





איור 1.1:

כעת ניתן הגדרה פורמאלית של $C(B,K)$. כמו בהגדרות רבות בספר זה, אנו מגדירים כאן אוסף של אובייקטים על ידי הצבעה על איברים מסויימים הנמצאים באוסף, ותיאור תכונת סגירות של האוסף לפעולות מסויימות, בתוספת הדרישה שאין באוסף אובייקטים "מיותרים", כלומר כאלו שקיומם אינו נובע מההנחות שלנו על האוסף. הגדרות אלו ניתן להמיר להגדרות מפורשות, אולם לא נעשה זאת בספר זה.

6.1 הגדרה.

(א) כל בלוק שייך ל $C(B,K)$ (כלומר כל איבר של B הוא גם איבר של $C(B,K)$).

(ב) אם F פעולה n־מקומית מ K, ו $c_1,\ldots,c_n$ אברים של $C(B,K)$ אזי $F(c_1,\ldots,c_n)$ איבר של $C(B,K)$.

(ג) כל איבר של $C(B,K)$ מתקבל על ידי (א) או על ידי (ב).

$C(B,K)$ נקראת הקבוצה הנוצרת מ B על ידי K. אם $C=C(B,K)$, אז (B,K) נקראת המבנה האינדוקטיבי על C.

נשים לב שניתן לתאר קבוצה נתונה C על ידי מבנים אינדוקטיביים שונים (ראה תרגיל 7.1).

לדוגמא, נוכל לתאר כל קבוצה כמבנה אינדוקטיבי אם פשוט ניקח $B=C$ (כלומר ניקח כל איבר של הקבוצה כבלוק). כמו כן אנו לא שוללים את האפשרות שהתוצאה של הפעלת פעולה היא שוב בלוק. למשל, יכולנו לתאר את המספרים הטבעיים כמבנה אינדוקטיבי עם $B=\{0,2\}$ והפעולה היחידה "עוקב". ברם, מבנה זה אינו "טבעי": מדוע אנו צריכים את 2 כבלוק, אם ניתן לקבלו על ידי הבלוק השני, 0, על ידי הפעלת פעולת העוקב פעמיים?

באופן כללי אנו רוצים שמבנה אינדוקטיבי יהיה תיאור פשוט של קבוצה: ככל שהתיאור פשוט יותר, פשוט יותר להוכיח תכונות באינדוקציה. לעיתים קרובות יש דרך טבעית יחידה להגדיר מבנה אינדוקטיבי על קבוצה C.

7.1 דוגמא. המבנה האינדוקטיבי הטבעי על קבוצת המספרים הטבעיים נתון על ידי בחירת $\{0\}$ כקבוצת הבלוקים, ופעולת העוקב כפעולה היחידה.

8.1 הגדרה. תהי $C = C(B,K)$ מבנה אינדוקטיבי, ותהי P תכונה שלאיברים של C יש או אין. תהי F פעולה n־מקומית על K. נאמר ש "F שומרת את P", אם:

> לכל $a_1, \ldots, a_n$ המספקים את התכונה P, גם $F(a_1, \ldots, a_n)$ מספקת את התכונה P.

9.1 אקסיומה (כלל האינדוקציה). תהי $C = C(B,K)$ מבנה אינדוקטיבי עם B כקבוצת הבלוקים ו K כקבוצת הפעולות, כך שמתקיים:

(א) כל בלוק הוא בעל התכונה P, וכן

(ב) כל פעולה שומרת את התכונה P

אזי:

(*) כל איבר של C הוא בעל התכונה P.

כשאנו מוכיחים שתכונה P מתקיימת לכל איבר x של מבנה אינדוקטיבי $C(B,K)$, אנו אומרים:

> נוכיח את P באינדוקציה על $C(B,K)$

או

> נוכיח את $P(x)$ באינדוקציה על x

הוכחה כזאת מורכבת משני שלבים: בשלב הראשון אנו מטפלים בבלוקים, כלומר אנו מראים שלכל הבלוקים יש את התכונה P (שלב זה נקרא בסיס האינדוקציה). בשלב השני אנו מטפלים בפעולות, כלומר אנו מראים שכל הפעולות שומרות את P. שלב זה נקרא שלב האינדוקציה.

בדרך כלל, עיקר ההוכחה הוא בשלב השני. לעיתים אנו יכולים להשתמש בטיעון כללי שתקף עבור כל הפעולות, ולעיתים אנו מטפלים בכל פעולה בנפרד.

כדי להראות שפעולה n־מקומית F שומרת את התכונה P, אנו מניחים ש $a_1, \ldots, a_n$ הם איברים שרירותיים במבנה האינדוקטיבי שלנו, המקיימים את התכונה P, ועלינו להראות ש $F(a_1, \ldots, a_n)$ מקיימת את התכונה P.

ההנחה "$a_1, \ldots, a_n$ מקיימים P" נקראת לעיתים קרובות "הנחת האינדוקציה" או "השערת האינדוקציה".

אינדוקציה היא אחת הדרכים הטבעיות ביותר להתמודד עם אובייקטים אינסופיים. במתמטיקה יש דוגמאות רבות שניתן לראותן כמבנים אינדוקטיביים. דוגמא טובה לכך היא השפה עבור "לוגיקת תחשיב פסוקים". אנו נלמד את התכונות המתמטיות של שפה זו בפרקים הבאים. נציג את השפה ונראה כמה מתכונותיה. לאחר מכן נכליל תכונות אלה למבנים אינדוקטיביים אחרים. השפה של לוגיקת תחשיב הפסוקים תוגדר כמבנה אינדוקטיבי. הבלוקים יהיו המשפטים הבסיסיים, כגון:

> אור־יהודה היא עיר
> 2 הוא איזוגי

הפעולות יהיו הקשרים הלוגיים המשמשים לבניית משפטים יותר מורכבים בעזרת הבלוקים ומשפטים אחרים. למשל, "וגם" וכן "אם ורק אם" הם קשרים לוגיים.

לפני שאנו מגדירים את שפת תחשיב הפסוקים, נעיר מספר הערות לגבי שפות פורמאליות. נתון לנו "אלף־בית" או "קבוצת סמלים" S. אוסף כל ה"מלים" בשפה הפורמאלית שלנו יהיו כל אברי S^+, שהיא קבוצת כל הסדרות הסופיות של איברים מ S (אנו מאפשרים רק סדרות מאורך 1 או יותר, כלומר לא נאפשר את "הסידרה הריקה" כמלה). אין זה משנה מהו הטבע האמיתי של ה"סמלים", אנו רק דורשים ש

$$\text{אף סמל אינו סידרה סופית של סמלים} \qquad (*)$$

איננו מבחינים במפורש בין סמל x לבין הסידרה מאורך 1 שמכילה את הסמל x. דבר זה לא יגרום אי־ודאויות, בזכות $(*)$.

אם x ו y הם סמלים, נכתוב xy לייצג את הסידרה שאברה הראשון הוא x והשני – y, דהיינו (x,y). (כאן יתכן ש x שוה ל y). נקרא לסידרה (x,y) "זוג סדור" ונאמר שהסידרה (x,y) היא מ"אורך" 2. אוסף כל הזוגות הסדורים של איברים מ S מסומן S^2.

באופן דומה, אנו קוראים לסידרה (x,y,z) מאורך 3 "שלשה" או "3־יה". סידרה $(x_1,\ldots,x_n)$ מאורך n תיקרא n־יה או "מלה מאורך n". קבוצת כל ה־n־יות תסומן S^n. לכן S^1 היא קבוצת כל המלים מאורך 1, שהיא, בעיקרון, זהה ל S.

בהינתן שתי סדרות x ו y נכתוב xy עבור שירשורן. באופן דומה עבור xyz, וכולי.

לא נסביר מהי "סידרה סופית". אנו מניחים שהקורא מכיר את העובדות הבסיסיות, כגון $(xy)z=x(yz)$ כאשר x, y, z הן סדרות סופיות, וכן

$$\text{אם } xr=ys\text{, אזי } x=y \text{ וכן } r=s$$

כאשר x ו y הם סמלים ו r, s הן סדרות.

לעיתים קרובות נשתמש באותיות כגון "x" עבור הסמלים בשפה שלנו. חשוב לזכור שהאות "x" אינה הסמל עצמו, אלא רק שם עבור הסמל. לכן יתכן שהאות "x" באחד העמודים תציין את אותו הסמל שהאות "x" בעמוד אחר מציינת. אפילו אותיות שונות יכולות לבטא את אותו סמל (או סידרה).

לפני שניתן את ההגדרות המפורשות של שפת תחשיב הפסוקים, נציג מספר קבוצות.

תהי $B=\{\mathtt{A}_1,\mathtt{A}_2,\mathtt{A}_3,\ldots\}$ קבוצה של סמלים שונים (אם i ו j מספרים טבעיים שונים, אזי "$\mathtt{A}_i$" ו "$\mathtt{A}_j$" מייצגים סמלים שונים) ותהי F הקבוצה הבאה בעלת ששת האיברים:

$$F=\{\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow,|\}$$

אברי B נקראים *סמלים פסוקיים*. הם ישמשו כבלוקים כאשר נבנה את השפה שלנו כמבנה אינדוקטיבי. אברי F נקראים *קשרים*. $\neg$ נקרא "לא", $\wedge$ נקרא "וגם", או "קוניונקציה", $\vee$ נקרא "או", $\rightarrow$ נקרא "גורר", $\leftrightarrow$ נקרא "אם ורק אם", ולקשר $|$ נקרא "לא גם" או בקיצור "לוגם".

10.1 הגדרה. האלף־בית של שפת תחשיב הפסוקים הוא הקבוצה $S=B\cup F\cup\{(,)\}$. S^+ היא אוסף הסדרות הסופיות של איברים מ S.

להלן דוגמאות לאברים ב S^+:

$$\mathtt{A}_1$$
$$\mathtt{A}_3$$
$$(\leftrightarrow \wedge \mathtt{A}_1(|))$$
$$()\mathtt{A}_1 \to \mathtt{A}_2$$

11.1 הגדרה. נגדיר מספר פעולות מעל S^+. עבור α, β ב S^+ נגדיר

$$F_\neg(\alpha), F_\wedge(\alpha,\beta), F_\vee(\alpha,\beta), F_\to(\alpha,\beta), F_\leftrightarrow(\alpha,\beta), F_|(\alpha,\beta)$$

על ידי

$$\begin{aligned} F_\neg(\alpha) &= (\neg\alpha) \\ F_\wedge(\alpha,\beta) &= (\alpha\wedge\beta) \\ F_\to(\alpha,\beta) &= (\alpha\to\beta) \\ F_\vee(\alpha,\beta) &= (\alpha\vee\beta) \\ F_\leftrightarrow(\alpha,\beta) &= (\alpha\leftrightarrow\beta) \\ F_|(\alpha,\beta) &= (\alpha|\beta) \end{aligned}$$

התחום של כל אחת מהפעולות האלו הוא S^+ והטווח בתוך S^+.

12.1 הגדרה. תהי $K = \{F_\neg, F_\wedge, F_\vee, F_\to, F_\leftrightarrow, F_|\}$. נגדיר את $\mathcal{L}$ להיות $C(B,K)$.

נקרא ל $\mathcal{L}$ שפה פסוקית, שפת תחשיב פסוקים, או שפת הלוגיקה של תחשיב פסוקים. אברי שפה זאת יקראו פסוקים.

להלן דוגמאות של פסוקים:

$$(\mathtt{A}_1 \vee (\mathtt{A}_2 \vee \mathtt{A}_3))$$
$$(((\neg\mathtt{A}_1) \wedge \mathtt{A}_2) \vee (\mathtt{A}_1 \wedge (\neg\mathtt{A}_2)))$$
$$((\mathtt{A}_1 \vee \mathtt{A}_2) \leftrightarrow (\mathtt{A}_2 \vee \mathtt{A}_1))$$
$$(\mathtt{A}_1|\mathtt{A}_1)$$

למשל $(\mathtt{A}_1 \vee (\mathtt{A}_2 \vee \mathtt{A}_3))$ הוא פסוק, משום ש

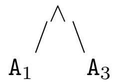
$$(\mathtt{A}_1 \vee (\mathtt{A}_2 \vee \mathtt{A}_3)) = F_\vee(\mathtt{A}_1, F_\vee(\mathtt{A}_2, \mathtt{A}_3)).$$

ניתן דוגמאות של "עצי תחביר" של אברים מ $C(B,K)$.

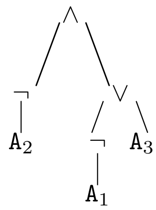
למשל, עץ התחביר של $(\mathtt{A}_1 \wedge \mathtt{A}_3)$ נתון באיור 1.2, ועץ התחביר של $((\neg\mathtt{A}_2) \wedge ((\neg\mathtt{A}_1) \vee \mathtt{A}_3))$ נתון באיור 1.3.

אין זה מיידי לקבוע אילו איברים של S^+ נמצאים ב $C(B,K)$. המשפטון הבא יסייע לנו להחליט אילו אברים של S^+ הם פסוקים.

13.1 משפטון. יהי $\alpha \in \mathcal{L}$. אזי מספר הסוגריים הימניים ב α שווה למספר הסוגריים השמאליים.



איור 1.2: עץ התחביר של $\mathtt{A}_1 \wedge \mathtt{A}_3$



איור 1.3: עץ התחביר של $((\neg\mathtt{A}_2) \wedge ((\neg\mathtt{A}_1) \vee \mathtt{A}_3))$

הוכחה. באינדוקציה. תהי P התכונה של להיות בעל מספר שווה של סוגריים ימניים ושמאליים.

(א) אם α בלוק, אזי ל α יש התכונה P (היות שמספר הסוגריים השמאליים = מספר הסוגריים הימניים = 0).

(ב) נניח ש α ו β בעלי התכונה P, אזי

$$\begin{array}{rcll} (\neg\alpha) & = & F_{\neg}(\alpha) & \text{בעל התכונה } P \\ (\alpha \wedge \beta) & = & F_{\wedge}(\alpha,\beta) & \text{בעל התכונה } P \\ & \vdots & & \\ (\alpha|\beta) & = & F_{|}(\alpha,\beta) & \text{בעל התכונה } P \end{array}$$

לכן, על פי כלל האינדוקציה, לכל איבר של $\mathcal{L}$ יש התכונה P (כלומר הוא בעל מספר שווה של סוגריים ימניים ושמאליים). זה משלים את הוכחת 13.1. $\square$

אם α ו β שתי סדרות של סמלים מ $\mathcal{L}$, $\alpha = \alpha_1 \cdots \alpha_n$ ו $\beta = \beta_1 \cdots \beta_m$, נסמן ב $\alpha\beta$ את שירשור שתי הסדרות, כלומר $\alpha\beta = \alpha_1 \cdots \alpha_n \beta_1 \cdots \beta_m$.

14.1 הגדרה. נאמר ש $\alpha \in S^+$ הוא רישא של $\beta \in S^+$ אם יש $\gamma \in S^+$ כך ש $\alpha\gamma = \beta$.

15.1 דוגמא.

1. $\wedge\mathtt{A}_1$ רישא של $\wedge\mathtt{A}_1)\mathtt{A}_2$.

2. $(\mathtt{A}_1 \wedge$ רישא של $(\mathtt{A}_1 \wedge \mathtt{A}_2)$.

3. אף סידרה אינה רישא של עצמה.

16.1 משפטון. אם $\alpha \in \mathcal{L}$ ו α' הוא רישא של α, אזי ל α' יותר סוגריים שמאליים מימניים.

הוכחה. באינדוקציה.
בסיס האינדוקציה: אם $\alpha \in B$, אזי אין לו רישא, לכן ל α יש התכונה.
שלב האינדוקציה, מקרה 1: $\alpha = (\neg\beta)$. α' יכול להיות:

(1.א) "$($"

(1.ב) "$(\neg$"

(1.ג) "$(\neg\beta'$" (כאשר β' רישא של β)

(1.ד) "$(\neg\beta$".

במקרים (1.א) ו (1.ב), ל α' סוגר שמאלי יחיד ואין סוגר ימני, לכן יש לו יותר סוגרים שמאליים מימניים.
מקרה (1.ג): אם α' הוא $(\neg\beta'$, אזי מהנחת האינדוקציה יש ל β' יותר סוגריים שמאליים מימניים. ל α' אותו מספר של סוגריים ימניים כמו ל β', וסוגר שמאלי אחד יותר. לכן ל α' יותר סוגריים שמאליים מימניים.
מקרה (1.ד): אם $\alpha' = (\neg\beta$, היות של־β אותו מספר של סוגריים שמאליים וימניים (לפי משפטון 13.1), ל α' יותר סוגריים שמאליים מימניים (משום שיש לו סוגר שמאלי אחד יותר מאשר ל β).
שלב האינדוקציה, מקרה 2: $\alpha = (\beta\wedge\gamma)$. לכן α' רישא של $(\beta\wedge\gamma)$. α' בהכרח שוה לאחד מהבאים:

(2.א) "$($"

(2.ב) "$(\beta'$", כאשר β' רישא של β

(2.ג) "$(\beta$"

(2.ד) "$(\beta\wedge$"

(2.ה) "$(\beta \wedge \gamma'$", כאשר γ' רישא של γ

(2.ו) "$(\beta \wedge \gamma$"

במקרים (2.א), (2.ב), (2.ג), (2.ו), מספר הסוגריים השמאליים של α' גדול באחד ממספר הסוגריים הימניים משום של־β (ול־γ) אותו מספר של סוגריים ימניים ושמאליים.
מקרה (2.ב): ל β' יותר סוגריים שמאליים מימניים, לכן ל α', שהוא בעל סוגר שמאלי נוסף (ואותו מספר של סוגריים ימניים כמו ל β'), יש יותר סוגריים שמאליים מימניים.
מקרה (2.ה): ל γ' יותר סוגריים שמאליים מימניים, ול־β מספר זהה של סוגריים שמאליים וימניים, לכן ל $\beta \wedge \gamma'$ יותר סוגריים שמאליים מימניים. לכן

α', שהוא בעל סוגר שמאלי נוסף (ואותו מספר של סוגריים ימניים כמו ל $\beta \wedge \gamma'$), מקיימת את הדרוש.
שלב האינדוקציה, מקרים 3, 4, 5 ו 6: α' רישא של $(\beta \vee \gamma)$, $(\beta \to \gamma)$, $(\beta \leftrightarrow \gamma)$ ו $(\beta | \gamma)$ בהתאמה. מקרים אלו דומים למקרה 2. $\square$

17.1 תוצאה. אף רישא של איבר ב $\mathcal{L}$ אינה איבר ב $\mathcal{L}$.

הוכחה. אם α' רישא של איבר ב $\mathcal{L}$, אז ל α' יותר סוגריים שמאליים מימניים, לפי 16.1, לכן α' אינו שייך ל $\mathcal{L}$, לפי 13.1. $\square$

18.1 משפטון. אם $\alpha \in \mathcal{L}$, אזי α בלוק, או שהסמל הראשון ב α הוא סוגר שמאלי.

הוכחה. מהגדרת $\mathcal{L}$. אם α בלוק, אזי הוא מקיים את טענת המשפט. אם $\alpha \in \mathcal{L}$ אינו בלוק, אזי α הוא מהצורה $F_\neg(\gamma)$, $F_\wedge(\gamma, \delta)$, $F_\vee(\gamma, \delta)$, $F_\to(\gamma, \delta)$, $F_\leftrightarrow(\gamma, \delta)$ או $F_|(\gamma, \delta)$. בכל מקרה כזה, α מתחיל בסוגר שמאלי. $\square$

19.1 סימון. נכתוב @ לציין איבר של $\{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow, |\}$, כלומר @ יציין קשר בינרי כלשהו.

20.1 משפט. יהי $\alpha \in \mathcal{L}$. אזי מתקיים בדיוק אחד מהמקרים הבאים:

(א) $\alpha \in B$, או

(ב) יש γ יחיד ב $\mathcal{L}$ כך ש $\alpha = (\neg\gamma)$, או

(ג) יש β, γ יחידים ב $\mathcal{L}$ ו @ יחיד ב $\{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow, |\}$ כך ש $\alpha = (\beta @ \gamma)$.

הוכחה. אם $\alpha \in B$ אין מה להוכיח. אחרת, כדי להוכיח את המשפט, עלינו להראות שהצגות כמו (ב) ו (ג) הן יחידות. אם אין יחידות, ייתכנו המקרים הבאים:
מקרה 1: $\alpha = (\neg\delta)$ וכן $\alpha = (\beta @ \gamma)$.
לכן $(\neg\delta) = (\beta @ \gamma)$, ולכן $\neg\delta) = \beta @ \gamma)$ וזה גורר שהאיבר הראשון של β הוא $\neg$, לכן β אינו שייך ל $\mathcal{L}$ (לפי 18.1).
מקרה 2: $\alpha = (\neg\delta)$ ו $\alpha = (\neg\beta)$. לכן $\neg\beta) = \neg\delta)$, ולכן $\beta) = \delta)$, ומכאן $\beta = \delta$.
מקרה 3: $\alpha = (\varepsilon @ \delta)$ ו $\alpha = (\beta \Delta \gamma)$, כאשר $\Delta \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow, |\}$
עלינו להראות שבמקרה זה, $\beta = \varepsilon$, $\Delta = @$ וכן $\gamma = \delta$.
מההנחה: $\varepsilon @ \delta = \beta \Delta \gamma$. לכן ε רישא של β או ש β רישא של ε או ש $\varepsilon = \beta$. שני המקרים הראשונים סותרים את 17.1, לכן $\beta = \varepsilon$. לכן, $\Delta\gamma = @\delta$, ומכאן $\Delta = @$ וכן $\gamma = \delta$, ולכן יש יחידות. $\square$

מה שהוכחנו עבור $\mathcal{L}$ חשוב מספיק כדי לקבל שם:

21.1 הגדרה. יהי C מבנה אינדוקטיבי ויהיו B, K כך ש $C = C(B, K)$. נאמר ש C בעל קריאות יחידה אם לכל $b \in C$ מתקיימת בדיוק אחת מהאפשרויות הבאות:

(א) $b \in B$

(ב) יש $a_1, \dots, a_n$ יחידים ב C ו F יחידה ב K כך ש $b = F(a_1, \dots, a_n)$

(ומכאן שאף איבר של B אינו מהצורה $F(a_1, \ldots, a_n)$).

22.1 תוצאה. $\mathcal{L}$ בעלת קריאות יחידה.

קל לראות, שאם איננו משתמשים בסוגריים, השפה שמתקבלת אינה בעלת קריאות יחידה:

23.1 הגדרה. נגדיר מבנה אינדוקטיבי כדלקמן: הבלוקים יהיו אברי הקבוצה

$$B = \{\mathtt{A}_1, \mathtt{A}_2, \mathtt{A}_3, \ldots\}$$

(קבוצה אינסופית), וקבוצת הפעולות

$$K' = \{G_\neg, G_\wedge, G_\vee, G_\rightarrow, G_\leftrightarrow, G_|\}$$

מוגדרת על ידי:

$$\begin{aligned} G_\neg(\alpha) &= \neg\alpha \\ G_\wedge(\alpha,\beta) &= \alpha \wedge \beta \\ G_\rightarrow(\alpha,\beta) &= \alpha \rightarrow \beta \\ G_\vee(\alpha,\beta) &= \alpha \vee \beta \\ G_\leftrightarrow(\alpha,\beta) &= \alpha \leftrightarrow \beta \\ G_|(\alpha,\beta) &= \alpha|\beta \end{aligned}$$

המבנה האינדוקטיבי $C(B, K')$ אינו בעל קריאות יחידה. לדוגמא,

$$G_\wedge(\mathtt{A}_1, G_\vee(\mathtt{A}_2, \mathtt{A}_3)) = \mathtt{A}_1 \wedge \mathtt{A}_2 \vee \mathtt{A}_3 = G_\vee(G_\wedge(\mathtt{A}_1, \mathtt{A}_2), \mathtt{A}_3)$$

ולכן ל $\mathtt{A}_1 \wedge \mathtt{A}_2 \vee \mathtt{A}_3$ שני עצי תחביר, שמובאים באיור 1.4.

איור 1.4: עצי תחביר אפשריים עבור $\mathtt{A}_1 \wedge \mathtt{A}_2 \vee \mathtt{A}_3$

על כל פנים, ניתן להשמיט את הסוגריים ולשמור על קריאות יחידה, אם אנו עוברים מ"סימון פנימי" (שבו סמל פעולה, כגון $\vee$, נכתב בין שני הנפעלים (אופרנדים), כמו ב $(\mathtt{A}_1 \vee \mathtt{A}_2)$) ל"סימון תחילי". בסימון תחילי, סמלי הפעולות נכתבים לפני האופרנדים.

24.1 הגדרה. קבוצת הבלוקים שלנו היא $B := \{\mathtt{A}_1, \mathtt{A}_2, \dots\}$ כמקודם, וקבוצת הפעולות היא $K^{\mathrm{pre}} := \{P_\vee, P_\wedge, P_\to, P_\neg, P_\leftrightarrow, P_|\}$, כאשר

$$\begin{aligned}
P_\neg(\alpha) &= \neg\alpha \\
P_\wedge(\alpha,\beta) &= \wedge\alpha\beta \\
P_\to(\alpha,\beta) &= \to\alpha\beta \\
P_\vee(\alpha,\beta) &= \vee\alpha\beta \\
P_\leftrightarrow(\alpha,\beta) &= \leftrightarrow\alpha\beta \\
P_|(\alpha,\beta) &= |\alpha\beta
\end{aligned}$$

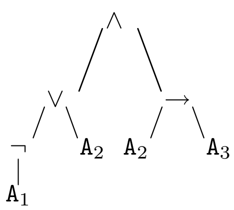
נסמן ב-$\mathcal{L}^{\mathrm{pre}}$ את המבנה האינדוקטיבי $C(B, K^{\mathrm{pre}})$.

25.1 דוגמא. להלן מספר איברים מ $\mathcal{L}^{\mathrm{pre}}$:

$$\begin{gathered}
\mathtt{A}_1 \\
\neg\mathtt{A}_1 \\
\mathtt{A}_2 \\
\vee\neg\mathtt{A}_1\mathtt{A}_2 \\
\mathtt{A}_3 \\
\to\mathtt{A}_2\mathtt{A}_3 \\
\wedge\vee\neg\mathtt{A}_1\mathtt{A}_2\to\mathtt{A}_2\mathtt{A}_3
\end{gathered}$$

הביטוי האחרון מתאים לנוסחה $(((\neg\mathtt{A}_1)\vee\mathtt{A}_2)\wedge(\mathtt{A}_2\to\mathtt{A}_3))$, כפי שניתן לראות מעץ התחביר ב 1.5.

$(((\neg\mathtt{A}_1) \vee \mathtt{A}_2) \wedge (\mathtt{A}_2 \to \mathtt{A}_3))$



$\wedge\vee\neg\mathtt{A}_1\mathtt{A}_2\to\mathtt{A}_2\mathtt{A}_3$

איור 1.5:

נראה שהשפה $\mathcal{L}^{\mathrm{pre}}$ בעלת קריאות יחידה. ראשית נשים לב:

26.1 עובדה. כל איבר $\alpha \in \mathcal{L}^{\mathrm{pre}}$ הוא בלוק, או שהוא מתחיל באיבר של $\{\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow, |\}$ (אך לא שניהם יחדיו). יתר על כן, אם α מתחיל ב $\wedge$, הוא

חייב להיות מהצורה $\wedge\beta\gamma$, כאשר β ו γ שייכים ל $\mathcal{L}^{\text{pre}}$, ובדומה עבור שאר הקשרים.

הוכחה. באינדוקציה. □

כעת אנו זקוקים למשפטון הדומה למשפטון 16.1.

27.1 משפטון. אם $\alpha,\ \alpha' \in \mathcal{L}^{\text{pre}}$, אז α' אינו רישא של α.

הוכחה. נוכיח זאת "באינדוקציה על האורך של α" (ראה גם תרגיל 8.1). במלים אחרות, נניח שהמשפטון אינו נכון, ונבחר דוגמא נגדית קצרה ככל שניתן (כלומר, ניקח את ה n הקטן ביותר כך שיש פסוק α כך ש $|\alpha| = n$ ויש לו רישא ב $\mathcal{L}^{\text{pre}}$ (אם יש יותר מפסוק אחד כזה, פשוט נבחר אחד מהם). לאחר מכן נראה שדוגמא נגדית כזאת לא תיתכן.

יהיו α ו α' פסוקים כך ש α' רישא של α, ונניח שמתקיים:

לכל פסוק $\beta \in \mathcal{L}^{\text{pre}}$, כך ש $|\beta| < |\alpha|$, אף רישא של β לא שייכת ל $\mathcal{L}^{\text{pre}}$.

מקרה 1: $\alpha = \mathtt{A}_n$ עבור n כלשהו. מקרה זה לא יתכן, שכן ל $\mathtt{A}_n$ אין רישא.

מקרה 2: $\alpha = \neg\beta$. כעת $\alpha' \in \mathcal{L}^{\text{pre}}$ רישא של α, וגם הוא מתחיל ב $\neg$, לכן בהכרח $\alpha' = \neg\beta'$, כאשר $\beta' \in \mathcal{L}^{\text{pre}}$. אבל אז $\neg\beta'$ רישא של $\neg\beta$, לכן β' רישא של β, מצב שלא יתכן משום ש β קצר מ α.

מקרה 3: $\alpha = @\beta\gamma$, כאשר $@ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, |\}$ קשר בינרי כלשהו. α' רישא של α, $\alpha' \in \mathcal{L}^{\text{pre}}$, לכן α' בהכרח מהצורה $@\beta'\gamma'$, עבור איזשהם $\beta', \gamma' \in \mathcal{L}^{\text{pre}}$. $\beta'\gamma'$ רישא של $\beta\gamma$.
הן β' והן β קצרים מ α, לכן מההנחה לא יתכן שאחד מהם רישא של השני. לכן בהכרח $\beta = \beta'$.
מכאן, $\beta\gamma = \beta\gamma'$, ולכן γ רישא של γ', מצב שלא יתכן.

אם כן, הוכחנו קריאות יחידה עבור המבנה האינדוקטיבי $\mathcal{L}^{\text{pre}}$. □

28.1 משפטון. למספרים הטבעיים מבנה אינדוקטיבי בעל קריאות יחידה.

הוכחה. המבנה האינדוקטיבי נתון ב 7.1. נשאיר את הוכחת הקריאות היחידה לקורא. □

המשפטים הבאים נכונים באופן כללי עבור מבנים אינדוקטיביים המקיימים קריאות יחידה. נוכיח רק את המקרה הפרטי של המספרים הטבעיים, ונשאיר את המקרה הכללי לקורא.

נניח שאנו רוצים לדעת אם מספר טבעי הוא זוגי או איזוגי, בהשתמש אך ורק בכך שהמבנה האינדוקטיבי של המספרים הטבעיים נתון לנו (כלומר, איננו רשאים להשתמש בכפל או בחילוק, רק בפעולת העוקב). במקום להתיחס לתכונת ה"זוגיות", נתבונן בפונקציה f, שמתאימה למספרים זוגיים את הערך 0, ולמספרים איזוגיים את הערך 1. במלים אחרות, $f(n)$ הוא השארית המתקבלת מחלוקת n ב 2.

כיצד ניתן לחשב את $f(n)$ עבור n במבנה האינדוקטיבי של המספרים הטבעיים?

אם $n = 0$, אזי $f(n) = 0$.

אחרת, n עוקב של מספר טבעי אחר, $n = s(k) = k + 1$. אם k זוגי, אזי n איזוגי, ואם k איזוגי, אזי n זוגי. לכן,

$$f(k+1) = \begin{cases} 0 & f(k) = 1 \\ 1 & f(k) = 0 \end{cases}$$

תהי G הפונקציה שמעתיקה את 0 ל 1 ואת 1 ל 0. f מקיימת שני תנאים:

$$\begin{array}{rclll} f(0) & = & 0 & (1) & \\ f(k+1) & = & G(\,f(k)\,) & (2) & \text{לכל } k. \end{array}$$

בכך תיארנו את הפונקציה f בעזרת הפונקציה G, שהיא פשוטה בהרבה.

האינטואיציה שלנו בקשר למספרים הטבעיים אומרת לנו שיש פונקציה יחידה f שמקיימת את התנאים (1) ו (2). למעשה, זה נכון לכל פונקציה G:

$$\begin{array}{rclcll} f(0) & = & 0 & & & \\ f(1) & = & G(f(0)) & = & G(0) & (**) \\ f(2) & = & G(f(1)) & = & G(G(0)) & \\ f(3) & = & G(f(2)) & = & G(G(G(0))) & \end{array}$$

וכולי.

המשמעות המדוייקת של ה"וכולי" הזה היא מה שרצינו לתפוס בהגדירנו מערכות אינדוקטיביות. לכן המשפטון הבא—למרות היותו ברור אינטואיטיבית—דורש הוכחה.

29.1 משפטון (הגדרה באינדוקציה על $\mathbb{N}$). תהי G פונקציה עם תחום A וטווח מוכל ב A, ויהי $a_0 \in A$.
אזי יש פונקציה יחידה f עם תחום $\mathbb{N}$, המקיימת

$$\begin{array}{rclll} f(0) & = & a_0 & (1) & \\ f(k+1) & = & G(\,f(k)\,) & (2) & \text{לכל } k. \end{array}$$

הוכחה. נחקה את הבניה האיטרטיבית ב $(**)$, תוך שימוש במושג הבא: נאמר שפונקציה f^* היא "טובה", אם

1. 0 שייך לתחום של f^*, $f^*(0) = a_0$, וכן
2. אם $k + 1$ שייך לתחום של f^*, אזי גם k שייך לתחום של f^*, ומתקיים

$$f^*(k+1) = G(f^*(k)).$$

שים לב שהתחום של פונקציה "טובה" יכול להיות קטן מאד – למשל, יש פונקציה "טובה" (יחידה) שתחומה $\{0\}$.

תת־טענה: לכל מספר טבעי n יש פונקציה "טובה" f^* כך ש $n \in \mathrm{dom}(f^*)$.

הוכחת תת־הטענה: 0 מקיים את הדרוש, שכן נוכל לבחור את הפונקציה f^* שתחומה $\{0\}$ ו $f(0) = a_0$.

נניח ש k מקיים את הדרוש. יש להראות שגם $k+1$ מקיים הדרוש. תהי f^* פונקציה "טובה" כך ש $k \in \mathrm{dom}(f^*)$. אם גם $k+1 \in \mathrm{dom}(f^*)$, אין מה להוכיח. אחרת, נוסיף את הזוג הסדור $(k+1, G(f^*(k)))$ לפונקציה f^*, ונקבל פונקציה "טובה" חדשה, שתחומה כולל את $k+1$.

טענתנו הבאה היא, שאם f_1^* ו f_2^* "טובות", אז לכל $n \in \mathrm{dom}(f_1^*) \cap \mathrm{dom}(f_2^*)$, f_1^* ו f_2^* מסכימות על n, כלומר $f_1^*(n) = f_2^*(n)$. להוכחת טענה זאת, נגדיר את התכונה הבאה של מספר טבעי n:

$$f_1^*(n) = f_2^*(n) \text{ או ש } , n \notin \mathrm{dom}(f_1^*) \cap \mathrm{dom}(f_2^*)$$

נשאיר לקורא את ההוכחה שלכל המספרים הטבעיים יש תכונה זאת (תרגיל 11.1).

כעת ניתן להגדיר את f: לכל מספר טבעי n, נגדיר את $f(n)$ להיות הערך (המשותף) של $f^*(n)$ עבור כל הפונקציות ה"טובות" f^* שתחומן כולל את n.

עלינו להראות ש f מקיימת את (1) ו (2).

(1) ברור, שכן כל הפונקציות ה"טובות" f^* מקיימות $f^*(0) = a_0$.

להוכחת (2), נתבונן ב $f(k+1)$. בהכרח יש פונקציה "טובה" f^* כך ש $f(k+1) = f^*(k+1)$. מהגדרת "טובה", $f^*(k+1) = G(f^*(k))$. היות ש f^* פונקציה "טובה" מתקיים $f(k) = f^*(k)$. לכן, $f(k+1) = G(f(k))$. □

הוכחה דומה מראה את המשפטון הבא:

30.1 משפטון (הגדרה באינדוקציה על $\mathbb{N}$, מוכללת). תהי G פונקציה בינארית עם תחום $\mathbb{N} \times A$ וטווח מוכל ב A, ויהי $a_0 \in A$.
אזי יש פונקציה יחידה f עם תחום $\mathbb{N}$, המקיימת

$$\begin{array}{rrcll} (1) & f(0) & = & a_0 & \\ (2) & f(k+1) & = & G(k, f(k)) & \text{לכל } k. \end{array}$$

אנו משאירים את ההוכחה כתרגיל לקורא.

31.1 דוגמא. אנו מעוניינים להגדיר את פונקצית ה"עצרת", כלומר הפונקציה $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ כך ש $f(0) = 1$, ולכל $n > 0$,

$$f(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$$

(מקובל לכתוב $n!$ במקום $f(n)$).

ההגדרה הפורמאלית משתמשת במשפטון 30.1, כאשר $A = \mathbb{N}$, $a_0 = 1$, ו $G(k, f(k)) = (k+1) \cdot f(k)$. המשפטון מבטיח לנו קיום ויחידות של פונקציה כזאת.

הערה: לא תמיד כותבים את כל הפרטים. לעיתים מסתפקים בכתיבה

$$\begin{array}{rcl} 0! & = & 1 \\ (k+1)! & = & (k+1) \cdot k! \end{array}$$

שתי הלמות האחרונות נכונות באופן כללי עבור מבנים אינדוקטיביים בעלי קריאות יחידה. ננסח משפטון אנלוגי למשפטון הראשון:

32.1 משפטון (הגדרות אינדוקטיביות)**.** נניח ש $C = C(B, K)$ בעל קריאות יחידה. תהי A קבוצה, ותהי f_0 פונקציה עם תחום B וטווח מוכל ב A. נניח שלכל $F \in K$ יש פונקציה G_F המקיימת:

1. $\mathrm{dom}(G_F) = A^n$, כאשר n הוא מספר המקומות של F.
2. $\mathrm{range}(G_F) \subseteq A$.

אזי יש פונקציה יחידה f המקיימת

1. $f(b) = f_0(b)$ לכל בלוק $b \in B$.
2. לכל n, לכל פעולה n־מקומית $F \in K$, ולכל $a_1, \ldots, a_n \in C$:

   $f(F(a_1, \ldots, a_n)) = G_F(f(a_1), \ldots, f(a_n))$.

להגדרות האינדוקטיביות תפקיד חשוב בפרקים הבאים. נשתמש בהן להרחבת השמות אמת שמוגדרות על הבלוקים בלבד, להיות מוגדרות על כל הפסוקים.

33.1 דוגמא. ברצוננו להגדיר פונקציה "מספר הסוגריים בפסוק α" באינדוקציה על α. היות שמספר הסוגריים ב $(\beta @ \gamma)$ הוא 2 ועוד מספר הסוגריים ב β ועוד מספר הסוגריים ב γ, ומספר הסוגריים ב $(\neg\beta)$ הוא מספר הסוגריים ב γ ועוד 2, נגדיר את f להיות הפונקציה היחידה המקיימת

$$\begin{aligned} f(\,(\beta @ \gamma)\,) &= f(\beta) + f(\gamma) + 2 && \text{עבור } @ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, |\} \\ f(\,(\neg\beta)\,) &= f(\beta) + 2 \end{aligned}$$

פורמאלית, אנו מפעילים את המשפטון הקודם בהשתמש בפונקציות $G_{F_@}$ (כאשר $@ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, |\}$) והפונקציה $G_{F_\neg}$, כאשר $G_{F_\vee}$ היא הפונקציה עם התחום של כל הזוגות הסדורים של מספרים טבעיים, מוגדרת על ידי

$$G_{F_\vee}(n, m) = n + m + 2.$$

$G_{F_\wedge}$, $G_{F_\rightarrow}$, $G_{F_\vee}$, $G_{F_\leftrightarrow}$, $G_{F_|}$ הן אותה פונקציה, ו $G_{F_\neg}$ מוגדרת על ידי

$$G_{F_\neg}(n) = n + 2.$$

34.1 דוגמא. מה הפונקציה f, המוגדרת על ידי הדרישות

$$\begin{aligned} f(\beta @ \gamma) &= f(\beta) + f(\gamma) && \text{עבור } @ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, |\} \\ f(\neg\beta) &= f(\beta) \\ f(\mathtt{A}_n) &= 1 && \text{עבור } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

מתארת?

תשובה: שתי הדרישות הראשונות מצביעות על כך ש f סופרת משהו בפסוק α. ספירה זו אינה גדלה כאשר שני פסוקים מצורפים על ידי $\vee$, $\wedge$, וכולי, ומהדרישה השלישית, מקבלים 1 על כל סמל פסוקי. לכן $f(\alpha)$ הוא מספר הבלוקים (סמלים פסוקיים) ב α (כולל חזרות). ההוכחה הפורמאלית היא באינדוקציה.

תרגילים

אינדוקציה על $\mathbb{N}$

תרגיל 1.1. מצא שתי דוגמאות של תהליכים "אינדוקטיביים" במציאות.

תרגיל 2.1. הוכח באינדוקציה:

1. לכל $n \geq 1$:
$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. לכל $n \geq 1$:
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} < 1.$$

תרגיל 3.1. הוכח באינדוקציה:

(א) מספר התחומים במישור שנוצר על ידי n קוים ישרים (כך שכל שני קוים נחתכים, אך אין שלשה קוים בעלי חיתוך משותף) הוא:
$$\frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

(ב) ניתן לצבוע את התחומים (שנוצרים עבור מספר כלשהו של קוים במישור) על ידי שני צבעים, כך שלכל שני תחומים שכנים יש צבעים שונים. (כאן שני תחומים נקראים "שכנים" אם יש להם קטע גבולי משותף, ולא רק נקודה משותפת).

תרגיל 4.1. מה הטעות בהוכחה האינדוקטיבית הבאה?
משפט. כל האיברים של קבוצה נתונה סופית הם זהים.

הוכחה. באינדוקציה על גודל הקבוצה. ברור שהטענה נכונה עבור קבוצות מגודל 1. נניח שהטענה נכונה לכל הקבוצות מגודל n. נקבע קבוצה α עם $n+1$ איברים, נאמר
$$\alpha = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}\}$$
אזי הקבוצות $\{a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n\}$ ו $\{a_1, \ldots, a_{n-1}, a_{n+1}\}$ הן מגודל n, לכן (על פי הנחת האינדוקציה) כל a_i שוה ל a_1. □

תרגיל 5.1. מה הטעות בהוכחה האינדוקטיבית הבאה?
משפט. לכל מספר סופי של נקודות במישור יש ישר שעובר דרך כולן.

הוכחה. באינדוקציה על מספר הנקודות. ברור שהטענה נכונה אם יש רק נקודה אחת או שתי נקודות. נניח שהטענה נכונה עבור n נקודות. נקבע $n+1$ נקודות שונות, נאמר $P_1, P_2, \ldots, P_n, P_{n+1}$. על פי הנחת האינדוקציה, כל הנקודות $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n$ נמצאות על ישר אחד l_1, וכן (שוב מהנחת האינדוקציה) כל הנקודות $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_{n+1}$ נמצאות על ישר אחד l_2. היות ש l_1 ו l_2 עוברות שתיהן דרך P_1 ו P_2, l_1 ו l_2 הן אותו ישר. לכן הנקודות $P_1, \ldots, P_{n+1}$ נמצאות על אותו ישר. $\square$

מבנים אינדוקטיביים כלליים

6.1 תרגיל. מהו המבנה האינדוקטיבי הטבעי עבור הקבוצה $\{2, 5, 8, 11, 14, \ldots\}$?

7.1 תרגיל. תהי $B = \{00, 01, 10, 11\}$ קבוצת בלוקים.
תהי $K_1 = \{F_1, F_2, F_3, F_4\}$ כאשר ה F_i־ים הם פעולות על סדרות (סופיות) של 0־ים ו 1־ים המוגדרים על ידי:

$$\begin{aligned} F_1(x) &= 0x0 \\ F_2(x) &= 0x1 \\ F_3(x) &= 1x0 \\ F_4(x) &= 1x1 \end{aligned}$$

תהי $K_2 = \{G_1, G_2, G_3, G_4\}$ כאשר ה G_i־ם הם פעולות מעל סדרות של 0־ים ו 1־ים המוגדרים על ידי:

$$\begin{aligned} G_1(x) &= 00x \\ G_2(x) &= 01x \\ G_3(x) &= 10x \\ G_4(x) &= 11x \end{aligned}$$

הראה ש $C(B, K_1) = C(B, K_2)$ (כלומר הקבוצות זהות, למרות שהן מתוארות על ידי מבנים שונים).

8.1 תרגיל. "אינדוקציה על האורך של α":
נניח ש P היא תכונה כך שלכל α בשפת תחשיב הפסוקים $\mathcal{L}$:

> אם כל $\beta \in \mathcal{L}$ מאורך קטן מאורכה של α מקיימת את התכונה P,
> אזי α מקיימת את התכונה P.

הראה שלכל α יש את התכונה P.

קריאות יחידה וכלל האינדוקציה

9.1 תרגיל. הוכח שהמבנה האינדוקטיבי של המספרים הטבעיים בעל קריאות יחידה.

תרגיל 10.1. תהי $S = \{a, b, c\}$ קבוצה בת שלשה איברים.

(א) נגדיר מבנה אינדוקטיבי עם שלשת הבלוקים a, b, c והפעולות F_a, F_b, F_c ($F_a(x) = xa$, וכולי). מבנה זה נותן לנו את S^+, שהיא קבוצת כל הסדרות הסופיות ב S. הוכח שמבנה זה בעל קריאות יחידה.

(ב) הגדר את פעולת השירשור באינדוקציה על S^+. כלומר, תן הגדרה אינדוקטיבית (השתמש במבנה האינדוקטיבי מ (א)) של הפעולה f שמתאימה לשתי סדרות את שירשורן,

$$f(x, y) = xy$$

(ג) הגדר "x רישא של y" באינדוקציה.

(ד) הראה שאם $x, y, r, s \in S^+$ ו $xy = rs$, אזי $x = r$ או שאחד משתי הסדרות x, r היא רישא של השניה.

תרגיל 11.1. השלם את ההוכחה של משפטון 29.1.

תרגיל 12.1.

(א) הוכח את משפטון 30.1.

(ב) היכן השתמשנו בקריאות היחידה?

תרגיל 13.1. הוכח את משפטון 32.1.

שפת הלוגיקה של תחשיב פסוקים

תרגיל 14.1. הוכח שאין פסוק עם שני קשרים צמודים.

תרגיל 15.1. הוכח שמספר הבלוקים בכל פסוק גדול באחד ממספר הקשרים הבינאריים.

תרגיל 16.1. מהי המשמעות של כל אחת מהפונקציות הבאות?
($\mathtt{A}_n$ יכול להיות כל בלוק; $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$; ו $@ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, |\}$).

(א)

$$\begin{aligned} F(\mathtt{A}_n) &= 0 \\ F((\alpha @ \beta)) &= F(\alpha) + F(\beta) + 1 \\ F((\neg\alpha)) &= F(\alpha) + 1 \end{aligned}$$

(ב)

$$\begin{aligned} G(\mathtt{A}_n) &= 1 \\ G((\neg\alpha)) &= G(\alpha)+3 \\ G((\alpha @ \beta)) &= G(\alpha)+G(\beta)+3 \end{aligned}$$

17.1 תרגיל. הגדר את הפונקציות הבאות באינדוקציה:

(א) מספר הבלוקים בפסוק.

(ב) ה n הגדול ביותר כך ש $\mathtt{A}_n$ בלוק המופיע ב α.

18.1 תרגיל. תן הגדרה מפורשת של הקבוצה:

$$A = \{n | n \text{ יש פסוק מאורך}\}$$

1.1 תרגיל (*). נניח שאנו משמיטים את כל הסוגריים השמאליים מכל הפסוקים.

(א) תן הגדרה אינדוקטיבית של השפה החדשה.

(ב) הוכח שהיא בעלת קריאות יחידה.

פרק 2

לוגיקת תחשיב פסוקים

מטרת פרק זה היא לימוד הטענות, שהן נכונות משום המבנה התחבירי שלהן. יש דוגמאות רבות לטענות כאלו בשפתנו היום יומית. לדוגמא, הטענה

(1) "באטמן הוא ראש ממשלת ישראל, או שבאטמן אינו ראש ממשלת ישראל"

תמיד נכונה. ביטוי מסוג זה נקרא טאוטולוגיה. אין זו משימה קלה לגלות מתי ביטוי הינו טאוטולוגיה. הבעיה עלולה להחמיר כאשר אורך הביטוי גדל. בפרק זה לא נדון בנכונות טענות כגון

"הסוס הלבן של נפוליאון הוא כחול"

היות שהאמת במקרה זה תלויה בשיקולים סמאנטיים (כלומר במשמעות המלים). במקום זאת, נתייחס לאמיתות או לשקריות של בלוקים כנתונים. לכן בלוק כגון "באטמן הוא נשיא ממשלת ישראל" יהיה אמיתי או שקרי.

אם נסמן את הביטוי האחרון בנוגע לבאטמן ב "A", אז (1) הופך להיות

"A או לא A".

לשם ניסוח טענות מתמטיות, ניתן להשתמש בצירופים של הביטויים הלוגיים הבאים:

לא, וגם, או, אם – אז –, אם ורק אם.

המשמעות של כל אחד מביטויים אלה תהיה ברורה אם נציין, שבמתמטיקה הביטוי "או" הוא תמיד במשמעות כוללת – כשאנו אומרים "A או B", כוונתנו היא "A או B או שניהם".

נשתמש בסימונים המקובלים הבאים לכל אחד מהביטויים הנ"ל, שהם בשפה מדוברת. נוסיף גם סימון מיוחד עבור הביטוי "לא – וגם – יחד":

הקשר	פירושו
$\neg A$	לא A (ה"שלילה" של A)
$A \wedge B$	A וגם B (ה"קוניונקציה" של A ו B)
$A \vee B$	A או B, או שניהם (ה"דיסיונקציה" של A ו B)
$A \rightarrow B$	אם A אז B (או: A "גורר" את B)
$A \leftrightarrow B$	A אם ורק אם B (או: A "אם ורק אם" B)
$A\|B$	לא A וגם B יחד (או: A "לוגם" B)

כעת נוכל להשתמש בשפה $\mathcal{L}$, שהוצגה בפרק הקודם, ללימוד טאוטולוגיות. $\mathcal{L}$ היא $C(B,K)$, כאשר $B = \{\mathtt{A}_1, \mathtt{A}_2, \ldots\}$ אוסף של בלוקים, ו

$$K = \{F_\neg, F_\wedge, F_\vee, F_\rightarrow, F_\leftrightarrow, F_|\}.$$

עשויה להתעורר השאלה, מדוע אנו זקוקים לכל הקשרים האלה לבניית השפה. למשל, האם $(A \leftrightarrow B)$ ו $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ אינם "אותו הדבר"? ומהו הסימן המוזר $|$? האם לא נוכל להשתמש ב $\neg(A \wedge B)$ במקום $A|B$?

התשובה היא שאכן, כפי שנראה בהמשך, מספיק יהיה להשתמש, למשל, בשני הקשרים $\neg$ ו $\wedge$ בלבד. אנו כוללים קשרים נוספים כגון $\rightarrow$ משום חשיבותם המעשית. $|$ נכלל בעיקר משום שהוא מחולל, לבדו, שפה "שלמה" (ראה 40.2 להלן).

בהתאם לכללים שניתנו בפרק 1, הדוגמא הקודמת (1) היא $((\mathtt{A}_1 \vee (\neg\mathtt{A}_1))$. לכן, הבלוקים $\mathtt{A}_1, \mathtt{A}_2, \ldots$ יהיו ביטויים אמיתיים או שקריים. בפרק זה, לא נלמד את האמת של הבלוקים האלו, אלא את האמת של הביטויים שניתן לבנות מהם, בהשתמש בפעולות $F_\neg, F_\wedge, F_\vee, F_\rightarrow$, $F_|$ ו $F_\leftrightarrow$, כאשר ערך האמת של כל אחד מהבלוקים $\mathtt{A}_1, \mathtt{A}_2, \ldots$ נתון.

1.2 הגדרה. השמת אמת שלמה S היא פונקציה מקבוצת הבלוקים $\mathtt{A}_1, \mathtt{A}_2, \ldots$ לתוך קבוצת שני האברים $\{T, F\}$. המשמעות של $S(\mathtt{A}_1) = T$ היא, שהשמת האמת S רואה את $\mathtt{A}_1$ כאמיתי. משמעות $S(\mathtt{A}_2) = F$ היא, ש S רואה את $\mathtt{A}_2$ כשיקרי.

השמת אמת S היא פונקציה מתת קבוצה של קבוצת כל הבלוקים $\mathtt{A}_1, \mathtt{A}_2, \ldots$ לתוך $\{T, F\}$.

אם נפרש את אברי B כקבוצת כל הטענות האפשריות, אזי השמת אמת S בוחרת טענות מסויימות וקוראת להן "אמתיות", כאשר כל שאר הטענות הן "שקריות". שים לב, שבבנותנו השמת אמת S, הערכים של $S(\mathtt{A}_i)$ ו $S(\mathtt{A}_j)$ אינם תלויים כלל זה בזה, עבור $i \neq j$.

2.2 הגדרה. תהי S השמת אמת שלמה. נגדיר את פונקצית האמת $\bar{S}$,

$$\bar{S} : \mathcal{L} \rightarrow \{T, F\}$$

באינדוקציה על $\mathcal{L}$ כדלקמן:
תהי $\alpha \in \mathcal{L}$.

1. אם α סמל פסוקי (בלוק), אזי $\bar{S}(\alpha) = S(\alpha)$

2. אם $\alpha = (\neg\beta)$ עבור $\beta \in \mathcal{L}$, אזי

$$\bar{S}(\alpha) = \begin{cases} T & \text{אם } \bar{S}(\beta) = F \\ F & \text{אם } \bar{S}(\beta) = T \end{cases}$$

3. אם $\alpha = (\beta \wedge \gamma)$ עבור $\beta, \gamma \in \mathcal{L}$,

$$\bar{S}(\alpha) = \begin{cases} T & \text{אם } \bar{S}(\beta) = T = \bar{S}(\gamma) \\ F & \text{אחרת} \end{cases}$$

4. אם $\alpha = (\beta \vee \gamma)$ עבור $\beta, \gamma \in \mathcal{L}$,

$$\bar{S}(\alpha) = \begin{cases} F & \text{אם } \bar{S}(\beta) = F = \bar{S}(\gamma) \\ T & \text{אחרת} \end{cases}$$

5. אם $\alpha = (\beta \rightarrow \gamma)$ עבור $\beta, \gamma \in \mathcal{L}$,

$$\bar{S}(\alpha) = \begin{cases} F & \text{אם } \bar{S}(\beta) = T \text{ וכן } \bar{S}(\gamma) = F \\ T & \text{אחרת} \end{cases}$$

6. אם $\alpha = (\beta \leftrightarrow \gamma)$ עבור $\beta, \gamma \in \mathcal{L}$,

$$\bar{S}(\alpha) = \begin{cases} T & \text{אם } \bar{S}(\beta) = \bar{S}(\gamma) \\ F & \text{אחרת} \end{cases}$$

7. אם $\alpha = (\beta | \gamma)$ עבור $\beta, \gamma \in \mathcal{L}$,

$$\bar{S}(\alpha) = \begin{cases} F & \text{אם } \bar{S}(\beta) = T = \bar{S}(\gamma) \\ T & \text{אחרת} \end{cases}$$

שים לב, שלמשל $\bar{S}((\beta \rightarrow \gamma)) = T$ כאשר $\bar{S}(\beta) = F$. לכן, טענה כמו "אם $0 = 1$ אז ..." תקבל את ערך האמת T, אם ערך האמת של "$0 = 1$" הוא F.

3.2 הערה. 1. בהגדרה 2.2, אנו משתמשים במבנה האינדוקטיבי של $\mathcal{L}$ להבטיח ש $\bar{S}$ מוגדרת לכל $\gamma \in \mathcal{L}$. ליתר דיוק, אם נגדיר את הפונקציות $G_\neg$, $G_\wedge$,... כבטבלאות להלן, נוכל לנסח את התנאים (1)–(7) הנ"ל כך:

$$\begin{aligned} \bar{S}(\neg\beta) &= G_\neg(\bar{S}(\beta)) \\ \bar{S}(\beta @ \gamma) &= G_@(\bar{S}(\beta), \bar{S}(\gamma)) \quad \text{עבור } @ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, |\} \end{aligned}$$

2. קל לראות באינדוקציה, שלכל $@ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, |\}$, ולכל השמת אמת שלמה S, הערך של $\bar{S}(\beta @ \gamma)$ תלוי אך ורק בערכי $\bar{S}(\beta)$ ו $\bar{S}(\gamma)$.

x	$G_\neg(x)$
T	F
F	T

x	y	$G_\wedge(x,y)$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

x	y	$G_\vee(x,y)$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

x	y	$G_\rightarrow(x,y)$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

x	y	$G_\leftrightarrow(x,y)$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

x	y	$G_\mid(x,y)$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	T

ההגדרה הבאה תאמר לנו מתי פסוק α נכון מסיבות מבניות.

4.2 הגדרה. פסוק $\alpha \in \mathcal{L}$ הוא טאוטולוגיה אם $\bar{S}(\alpha) = T$ לכל השמת אמת שלמה S.

5.2 דוגמא. (1) $\mathtt{A}_1$ אינו טאוטולוגיה.
(2) $(\mathtt{A}_1 \vee (\neg\mathtt{A}_1))$ הוא טאוטולוגיה.
(3) $(\mathtt{A}_1 \rightarrow \mathtt{A}_2)$ אינו טאוטולוגיה.
(4) $(\mathtt{A}_1 \rightarrow \mathtt{A}_1)$ הוא טאוטולוגיה.
(5) $(((\neg\mathtt{A}_2) \rightarrow \mathtt{A}_2) \rightarrow \mathtt{A}_2)$ הוא טאוטולוגיה.
(6) $((\mathtt{A}_1 \rightarrow \mathtt{A}_2) \vee (\mathtt{A}_2 \rightarrow \mathtt{A}_1))$ הוא טאוטולוגיה.
(7) $((\mathtt{A}_1 \rightarrow \mathtt{A}_2) \rightarrow (\mathtt{A}_2 \rightarrow \mathtt{A}_1))$ אינו טאוטולוגיה.
(8) $(\neg(\mathtt{A}_1 \wedge (\neg\mathtt{A}_1)))$ הוא טאוטולוגיה.

הוכחה. תרגיל 2.2. $\square$

6.2 הגדרה. אם $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$, אזי הטענה

$$\alpha \Rightarrow \beta$$

פירושה: "לכל השמת אמת שלמה S, אם $\bar{S}(\alpha) = T$, אזי $\bar{S}(\beta) = T$ " במלים אחרות, " אין השמת אמת שלמה S כך ש $\bar{S}(\alpha) = T$ ו $\bar{S}(\beta) = F$ ". נכתוב $\alpha \not\Rightarrow \beta$ אם לא מתקיים $\alpha \Rightarrow \beta$. במלים אחרות, $\alpha \not\Rightarrow \beta$ פירושו שיש השמת אמת שלמה S כך ש $\bar{S}(\alpha) = T$ ו $\bar{S}(\beta) = F$.

נכתוב $\alpha \Leftrightarrow \beta$ אם $\alpha \Rightarrow \beta$ וגם $\beta \Rightarrow \alpha$, או במלים אחרות, אם לכל השמת אמת שלמה S, $\bar{S}(\alpha) = \bar{S}(\beta)$. במקרה זה, נאמר ש α ו β שקולים.

נכתוב $\Gamma \Rightarrow \alpha$ (כאשר $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$ קבוצת פסוקים) אם אין השמת אמת שלמה S כך שלכל $\gamma \in \Gamma$, $\bar{S}(\gamma) = T$ ו $\bar{S}(\alpha) = F$.

7.2 הערה. (1) $\alpha \Rightarrow \beta$ נכון אם ורק אם הפסוק $\alpha \rightarrow \beta$ הוא טאוטולוגיה. כמו כן, $\alpha \Leftrightarrow \beta$ נכון אם ורק אם $\alpha \leftrightarrow \beta$ טאוטולוגיה.
(2) יש הבדל מהותי בין $\alpha \rightarrow \beta$ ו $\alpha \Rightarrow \beta$:

$\alpha \to \beta$ הוא פסוק אחד,
בעוד ש $\alpha \Rightarrow \beta$ היא טענה על שני פסוקים.

8.2 משפטון.

1. אם $\alpha \Rightarrow \beta$ וכן $\beta \Rightarrow \gamma$, אזי $\alpha \Rightarrow \gamma$.
2. אם α טאוטולוגיה, ו $\alpha \Rightarrow \beta$, אז גם β טאוטולוגיה.

הוכחה. תרגיל. □

9.2 הגדרה. יהי $\alpha \in \mathcal{L}$. נגדיר את $\mathrm{BKS}(\alpha)$ באינדוקציה על $\mathcal{L}$:

1. אם α בלוק, $\mathrm{BKS}(\alpha) = \{\alpha\}$.
2. אם $\alpha = (\neg\beta)$, $\mathrm{BKS}(\alpha) = \mathrm{BKS}(\beta)$.
3. אם $\alpha = (\beta @ \gamma)$ עבור $@ \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow, |\}$,

$$\mathrm{BKS}(\alpha) = \mathrm{BKS}(\beta) \cup \mathrm{BKS}(\gamma)$$

10.2 הערה. $\mathrm{BKS}(\alpha)$ הוא אוסף הבלוקים המופיעים ב α.

11.2 משפטון. יהיו S_1 ו S_2 השמות אמת שלמות. יהי $\alpha \in \mathcal{L}$. נניח ש $S_1(\mathtt{A}) = S_2(\mathtt{A})$ לכל $\mathtt{A} \in \mathrm{BKS}(\alpha)$. אזי $\bar{S}_1(\alpha) = \bar{S}_2(\alpha)$.

הוכחה. באינדוקציה על α.

1. אם α בלוק, $\bar{S}_1(\alpha) = S_1(\alpha) = S_2(\alpha) = \bar{S}_2(\alpha)$.

   מהקריאות היחידה, אם α אינו בלוק, אז מתקיים בדיוק אחד מהבאים

2. $\alpha = (\neg\beta)$, ואז מהגדרה 9.2, $\mathrm{BKS}(\beta) = \mathrm{BKS}(\alpha)$. לכן מהנחת האינדוקציה, $\bar{S}_1(\beta) = \bar{S}_2(\beta)$, ומהגדרה 2.2, $\bar{S}_1(\neg\beta) = \bar{S}_2(\neg\beta)$, ו $\bar{S}_1(\alpha) = \bar{S}_2(\alpha)$.
3. $\alpha = (\beta \wedge \gamma)$, ואז $\mathrm{BKS}(\beta) \subseteq \mathrm{BKS}(\alpha)$, לכן $\bar{S}_1(\mathtt{A}) = \bar{S}_2(\mathtt{A})$ לכל $\mathtt{A} \in \mathrm{BKS}(\beta)$, ומהנחת האינדוקציה, $\bar{S}_1(\beta) = \bar{S}_2(\beta)$.

   באופן דומה, היות ש $\mathrm{BKS}(\gamma) \subseteq \mathrm{BKS}(\alpha)$, נקבל $\bar{S}_1(\gamma) = \bar{S}_2(\gamma)$. מהגדרה 2.2, $\bar{S}_1(\beta \wedge \gamma) = \bar{S}_2(\beta \wedge \gamma)$, כלומר $\bar{S}_1(\alpha) = \bar{S}_2(\alpha)$.
4. $\alpha = (\beta @ \gamma)$ לאיזשהו $@$ אחר. טיעון דומה לטיעון הקודם יראה שגם במקרה זה מתקיים הדרוש.

□

12.2 תוצאה. יהי $\alpha \in \mathcal{L}$, ותהי S השמת אמת שלמה. אזי הערך $\bar{S}(\alpha)$ תלוי אך ורק בערכי S על $\mathrm{BKS}(\alpha)$.

13.2 הגדרה. תהי S השמת אמת שאינה שלמה, כך ש $\mathrm{dom}(S)$ מכיל את $\mathrm{BKS}(\alpha)$, אזי עבור S_1, S_2 השמות אמת שלמות המרחיבות את S, $\bar{S}_1(\alpha) = \bar{S}_2(\alpha)$. נגדיר את $\bar{S}(\alpha)$ להיות ערך משותף זה. לכן, $\bar{S}(\alpha)$ מוגדר היטב לכל השמת אמת S המוגדרת על $\mathrm{BKS}(\alpha)$.

נשאיר לקורא את הבדיקה ש $\bar{S}(\alpha)$ מקיימת את כל הדרישות של 2.2, כאשר $\mathrm{dom}(S)$ מכיל את $\mathrm{BKS}(\alpha)$.

14.2 עובדה. α טאוטולוגיה אם ורק אם לכל השמת אמת S על $\mathrm{BKS}(\alpha)$, $\bar{S}(\alpha) = T$.

15.2 הגדרה.

1. תהי S השמת אמת המוגדרת על $\mathrm{BKS}(\alpha)$. נאמר ש S מספקת את α אם $\bar{S}(\alpha) = T$.
2. אם Γ קבוצת פסוקים, ו S השמת אמת, נאמר ש S מספקת את Γ אם S מספקת כל $\alpha \in \Gamma$.

16.2 הגדרה. יהי $\alpha \in \mathcal{L}$. אזי $|\mathrm{BKS}(\alpha)|$ הוא מספר הבלוקים השונים ב $\mathrm{BKS}(\alpha)$.

17.2 תוצאה. יהי $\alpha \in \mathcal{L}$, ויהי $n = |\mathrm{BKS}(\alpha)|$. אזי יש 2^n השמות אמת שונות, שיש לבדוק את ערכיהן על α כדי לקבוע אם הוא טאוטולוגיה.

הוכחה. לפי עובדה 14.2, אין צורך לבדוק את כל השמות האמת השלמות כדי לקבוע אם α טאוטולוגיה. כל שיש לבדוק הוא את השמות האמת המוגדרות על $\mathrm{BKS}(\alpha)$. נראה שיש 2^n השמות אמת כאלו, באינדוקציה על n.

1. אם $n = 1$, אז יש שתי השמות אמת כאלו, כלומר אם $\mathrm{BKS}(\alpha) = \{\mathtt{A}\}$, אז $S_1(\mathtt{A}) = T$ היא אחת מהן, ו $S_2(\mathtt{A}) = F$ היא השניה.
2. אם $n = k + 1$, יהי $\mathtt{A} \in \mathrm{BKS}(\alpha)$. מהנחת האינדוקציה, יש 2^k השמות אמת המוגדרות על $\mathrm{BKS}(\alpha) - \{\mathtt{A}\}$. לכל השמת אמת כזאת S^*, נוכל להגדיר שתי המות אמת S_1^* ו S_2^*, המוגדרות על כל $\mathrm{BKS}(\alpha)$: $S_1^*(\mathtt{B}) = S^*(\mathtt{B})$ לכל $\mathtt{B} \in \mathrm{BKS}(\alpha) - \{\mathtt{A}\}$, ו $S_1^*(\mathtt{A}) = T$; $S_2^*(\mathtt{B}) = S^*(\mathtt{B})$ לכל $\mathtt{B} \in \mathrm{BKS}(\alpha) - \{\mathtt{A}\}$, ו $S_2^*(\mathtt{A}) = F$. לכן, המספר הכולל של השמות אמת על $BKS(\alpha)$ הוא $2^k + 2^k = 2^{k+1} = 2^n$.

□

18.2 הגדרה. יהי $\alpha \in \mathcal{L}$. נגדיר את $\mathrm{SUB}(\alpha)$ באינדוקציה:

1. אם α בלוק, $\mathrm{SUB}(\alpha) = \{\alpha\}$.
2. אם $\alpha = (\neg\beta)$, $\mathrm{SUB}(\alpha) = \{\alpha\} \cup \mathrm{SUB}(\beta)$.
3. אם $\alpha = (\beta @ \gamma)$ כאשר $@ \in \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, |\}$,

$$\mathrm{SUB}(\alpha) = \{\alpha\} \cup \mathrm{SUB}(\beta) \cup \mathrm{SUB}(\gamma)$$

19.2 הערה. $\mathrm{SUB}(\alpha)$ הוא אוסף הביטויים, שהם "תת פסוקים" של α, כאשר גם α נחשב תת נוסחה של עצמו.

20.2 דוגמא. יהי α הפסוק $((\neg \mathtt{A}_1) \wedge (\mathtt{A}_1 \vee \mathtt{A}_2))$.
אזי $\mathrm{SUB}(\alpha) = \{\ \mathtt{A}_1,\ (\neg \mathtt{A}_1),\ \mathtt{A}_2,\ (\mathtt{A}_1 \vee \mathtt{A}_2),\ ((\neg \mathtt{A}_1) \wedge (\mathtt{A}_1 \vee \mathtt{A}_2))\ \}$.

21.2 הגדרה. תהי $f : A \to B$ פונקציה, המעתיקה את A לתוך B, ותהי $C \subseteq A$. הצימצוס של f ל C, שמסומן $f{\restriction}C$, הוא הפונקציה מ C לתוך B, המוגדרת לכל $c \in C$ על ידי:

$$(f{\restriction}C)(c) = f(c)$$

22.2 הגדרה. יהי $\alpha \in \mathcal{L}$. טבלת האמת של α, שתסומן $TABLE(\alpha)$, היא אוסף כל הפונקציות f כך ש

1. $f : \mathrm{SUB}(\alpha) \to \{T, F\}$
2. לכל $\beta \in \mathrm{SUB}(\alpha)$, $f(\beta) = \overline{f{\restriction}\mathrm{BKS}(\beta)}(\beta)$

תנאי (2) אומר, ש $f(\beta)$ הוא ערך האמת שנקבע באופן יחיד (בהשתמש בכללים מ 2.2) מהצימצום של f לבלוקים של β.

נהוג לתאר טבלת אמת על ידי הצגת כל הפונקציות מהטבלה בשורות נפרדות. בכל שורה, נתונה השמת אמת על הבלוקים של הפסוק, ולאחר מכן מתואר כיצד השמת אמת זאת מורחבת לכל תת הפסוקים של הפסוק הנתון.

23.2 דוגמא (טבלאות אמת).

(א) אם α בלוק, נאמר $\mathtt{A}_1$, אז $\mathrm{SUB}(\alpha) = \{\mathtt{A}_1\}$, ולכן $TABLE(\alpha)$ מכילה את כל הפונקציות מ $\{\mathtt{A}_1\}$ לתוך $\{T, F\}$ (יש שתי פונקציות כאלו):

השמת אמת	$\alpha = \mathtt{A}_1$
S_1	T
S_2	F

(ב) אם $\alpha = (\mathtt{A}_1 \vee \mathtt{A}_2)$, כאשר $\mathtt{A}_1$ ו $\mathtt{A}_2$ בלוקים, אז $\mathrm{SUB}(\alpha) = \{\mathtt{A}_1, \mathtt{A}_2, \alpha\}$, ולכן טבלת האמת שלו מכילה את כל הפונקציות מ $\{\mathtt{A}_1, \mathtt{A}_2, \alpha\}$ לתוך $\{T, F\}$, שמקיימות את תנאי $2(22.2)$ (יש 4 פונקציות כאלה):

השמת אמת	$\mathtt{A}_1$	$\mathtt{A}_2$	$\alpha = (\mathtt{A}_1 \vee \mathtt{A}_2)$
S_1	T	T	T
S_2	T	F	T
S_3	F	T	T
S_4	F	F	F

(ג) אם $\alpha = ((\mathtt{A}_1 \wedge \mathtt{A}_3) \vee \mathtt{A}_{12})$
טבלת האמת שלו היא:

השמת אמת	$\mathtt{A}_1$	$\mathtt{A}_3$	$\mathtt{A}_{12}$	$(\mathtt{A}_1 \wedge \mathtt{A}_3)$	α
S_1	T	T	T	T	T
S_2	T	T	F	T	T
S_3	T	F	T	F	T
S_4	T	F	F	F	F
S_5	F	T	T	F	T
S_6	F	T	F	F	F
S_7	F	F	T	F	T
S_8	F	F	F	F	F

לשם נוחיות, נשמיט בהמשך את הסוגריים כאשר ברור היכן עליהם להיות.
לא נשמיט סוגריים מיד לאחר הקשר $\neg$. לכן, $\neg A \vee B$ צריך להיקרא $((\neg A) \vee B)$, בעוד ש $\neg(A \vee B)$ הוא $(\neg(A \vee B))$.
במקרים הנותרים, יש לקרוא את הפסוקים משמאל לימין, כלומר

$$A \vee B \vee C \text{ הוא קיצור של } ((A \vee B) \vee C)$$

(במקרה זה, הביטוי למעשה $\Leftrightarrow$ ל $A \vee (B \vee C)$).

24.2 משפטון (צורות נורמליות). (1) יהי $\alpha = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$, ותהי S השמת אמת המוגדרת על $\mathrm{BKS}(\alpha)$. אזי $\bar{S}(\alpha) = T$ אם ורק אם לכל $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\bar{S}(\alpha_i) = T$.
(2) יהי $\alpha = \alpha_1 \vee \cdots \vee \alpha_n$, ותהי S השמת אמת המוגדרת על $\mathrm{BKS}(\alpha)$. אזי $\bar{S}(\alpha) = T$ אם ורק אם יש $i \in \{1, \ldots, n\}$ כך ש $\bar{S}(\alpha_i) = T$.

הוכחה. תרגיל. $\square$

25.2 הגדרה. פסוק α נקרא n־פיסקה (n-clause), אם α מהצורה $\beta_1 \vee \ldots \vee \beta_n$, כאשר כל β_i הוא $\mathtt{A}_i$ או $(\neg \mathtt{A}_i)$.
נאמר ש α פיסקה, אם α n־פיסקה עבור n טבעי כלשהו.

יש ארבעה 2־פיסקאות:

$$(\mathtt{A}_1 \vee \mathtt{A}_2)$$
$$(\neg \mathtt{A}_1 \vee \mathtt{A}_2)$$
$$(\mathtt{A}_1 \vee \neg \mathtt{A}_2)$$
$$(\neg \mathtt{A}_1 \vee \neg \mathtt{A}_2)$$

26.2 משפטון. יש 2^n n־פיסקאות.

הוכחה. תרגיל. $\square$

27.2 הגדרה. פסוק α הוא בצורה קוניונקטיבית נורמלית (צק"נ), אם (לאיזשהם n, k)

$$\alpha \;=\; \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_k$$

כאשר ה γ_i־ים הם n־פיסקאות שונות. אם כל הפיסקאות ב α הן n־פיסקאות, נאמר לפעמים ש α הוא n־צק"נ.

28.2 דוגמא. הפסוקים הבאים הם בצק"נ.

$\mathtt{A}_1$	1־צק"נ, המכיל רק 1־פיסקה אחת
$\mathtt{A}_1 \wedge \neg\mathtt{A}_1$	1־צק"נ, המכיל שתי 1־פיסקאות
$(\mathtt{A}_1 \vee \mathtt{A}_2) \wedge (\neg\mathtt{A}_1 \vee \neg\mathtt{A}_2) \wedge (\mathtt{A}_1 \vee \neg\mathtt{A}_2)$	2־צק"נ, המכיל שלשה 2־פיסקאות
$(\mathtt{A}_1 \vee \neg\mathtt{A}_2 \vee \mathtt{A}_3) \wedge (\neg\mathtt{A}_1 \vee \neg\mathtt{A}_2 \vee \mathtt{A}_3)$	3־צק"נ, המכיל שני 3־פיסקאות

יש התאמה טבעית בין השמות אמת על $\mathtt{A}_1,\ldots,\mathtt{A}_n$ ובין n־פיסקאות:

29.2 הגדרה. תהי S השמת אמת על $\{\mathtt{A}_1,\ldots,\mathtt{A}_n\}$. נגדיר את ה$n$־פיסקה δ_S להיות

$$\delta_S \;:=\; \beta_1 \vee \cdots \vee \beta_n$$

כאשר עבור $i = 1,\ldots,n$,

$$\beta_i := \begin{cases} \mathtt{A}_i & \text{אם } S(\mathtt{A}_i) = F \\ \neg\mathtt{A}_i & \text{אם } S(\mathtt{A}_i) = T \end{cases}$$

30.2 דוגמא. תהי S השמת האמת, שמתאימה ל $\mathtt{A}_1$ את T ול $\mathtt{A}_2$ את F. אזי δ_S הוא הפסוק $(\neg\mathtt{A}_1) \vee \mathtt{A}_2$.

31.2 משפטון. תהי S השמת אמת על $\{\mathtt{A}_1,\ldots,\mathtt{A}_n\}$. אזי

(1) $\bar{S}(\delta_S) = F$.

(2) לכל n־פיסקה $\alpha \neq \delta_S$, $\bar{S}(\alpha) = T$.

(3) לכל השמת אמת S' על $\{\mathtt{A}_1,\ldots,\mathtt{A}_n\}$ כך ש $S' \neq S$, $\bar{S'}(\delta_S) = T$.

הוכחה. יהי $\alpha = \beta_1 \vee \ldots \vee \beta_n$. אם $\alpha = \delta_S$, אז לכל i, $\bar{S}(\beta_i) = F$, ולכן $\bar{S}(\alpha) = F$. אולם אם $\alpha \neq \delta_S$, יש איזה i שעבורו $\bar{S}(\beta_i) = T$, ולכן $\bar{S}(\alpha) = T$. כמו כן, אם $S' \neq S$, אזי $\delta_{S'} \neq \delta_S$, ולכן מ (1), $\bar{S'}(\delta_S) = T$. $\square$

32.2 משפט. לכל פסוק α שאינו טאוטולוגיה, יש פסוק α' בצק"נ כך ש $\alpha' \Leftrightarrow \alpha$.

הוכחה. תהי $\mathrm{BKS}(\alpha) \subseteq \{\mathtt{A}_1,\ldots,\mathtt{A}_n\}$. נמצא את α' הדרוש.

היות ש α אינו טאוטולוגיה, יש השמת אמת S על $\{\mathtt{A}_1,\ldots,\mathtt{A}_n\}$ כך ש $\bar{S}(\alpha) = F$. תהיינה $S_1,\ldots,S_k$ כל השמות האמת על $\{\mathtt{A}_1,\ldots,\mathtt{A}_n\}$ עם תכונה זאת. יהי

$$\alpha' \;:=\; \delta_{S_1} \wedge \cdots \wedge \delta_{S_k}$$

מהבניה, α' בn־צק"נ. נראה ש $\alpha \Leftrightarrow \alpha'$.

תהי S השמת אמת על $\{\mathtt{A}_1,\ldots,\mathtt{A}_n\}$.

מקרה 1: $\bar{S}(\alpha) = F$. לכן $S = S_i$ לאיזה i. היות ש $\bar{S}_i(\delta_{S_i}) = F$, גם $\bar{S}_i(\alpha') = F$, ולכן במקרה זה $\bar{S}(\alpha) = \bar{S}(\alpha')$.

מקרה 2: $\bar{S}(\alpha) = T$. אזי לכל $i \leq k$, $S \neq S_i$, לכן $\delta_S \neq \delta_{S_i}$, ולכן מ 31.2, $\bar{S}(\delta_{S_i}) = T$. לכן גם $\bar{S}_i(\alpha') = T$, וגם במקרה זה $\bar{S}(\alpha) = \bar{S}(\alpha')$. $\square$

כיישום של צורות קוניונקטביות נורמליות, ניתן הוכחה של "משפט השירבוב (interpolation) עבור לוגיקה פסוקית".

33.2 משפט. נניח ש

$$\beta \Rightarrow \gamma$$

וכן $\mathrm{BKS}(\beta) \cap \mathrm{BKS}(\gamma) = \{\mathtt{A}_1, \ldots, \mathtt{A}_m\}$ ($m > 0$). **אזי יש פסוק** α **כך ש**

$$\mathrm{BKS}(\alpha) \subseteq \{\mathtt{A}_1, \ldots, \mathtt{A}_m\}$$

ומתקיים

$$\begin{array}{lll} \beta \Rightarrow & \alpha & \\ & \alpha & \Rightarrow \gamma \end{array}$$

(הפסוק α "משתרבב" בין β ו γ).

הוכחה. נניח ש

$$\mathrm{BKS}(\beta) = \{\mathtt{B}_1, \ldots, \mathtt{B}_k, \mathtt{A}_1, \ldots, \mathtt{A}_m\} \quad \mathrm{BKS}(\gamma) = \{\mathtt{C}_1, \ldots, \mathtt{C}_l, \mathtt{A}_1, \ldots, \mathtt{A}_m\}$$

איסטרטגיית ההוכחה: נבנה α בצק"נ, כך ש α יהיה קוניונקציה של m־פסקאות מסויימות. אילו m־פסקאות נבחר? היות שאנו רוצים לקבל "$\beta \Rightarrow \alpha$", ומתקיים $\alpha \Rightarrow \varepsilon$, כאשר ε הוא פיסקה המופיעה ב α, נוכל לקחת רק פסקאות ε המקיימות "$\beta \Rightarrow \varepsilon$". כדי להבטיח שנקבל $\alpha \Rightarrow \gamma$, ניקח את כל הפיסקאות האלו ε. לפני שנוכל לבצע זאת, יש לטפל במקרה שאין פסקאות כאלו.

מקרה 1: נניח שאין m־פיסקאות ε (כלומר פיסקאות הבנויות מ $\mathtt{A}_1, \ldots, \mathtt{A}_m$) כך ש $\beta \Rightarrow \varepsilon$.

במקרה זה, יהי $\alpha := \neg\mathtt{A}_1 \vee \mathtt{A}_1$. אזי α טאוטולוגיה. בפרט, $\beta \Rightarrow \alpha$. נותר להוכיח ש $\alpha \Rightarrow \gamma$. נראה שגם γ טאוטולוגיה. תהי S_c השמת אמת המוגדרת על $\{\mathtt{A}_1, \ldots, \mathtt{A}_m, \mathtt{C}_1, \ldots, \mathtt{C}_l\}$. נראה ש $\bar{S}_c(\gamma) = T$.

תהי $S_a := S_c \restriction \{\mathtt{A}_1, \ldots, \mathtt{A}_m\}$. מהנחתנו, $\beta \not\Rightarrow \delta_{S_a}$.

לכן יש השמת אמת S_b על $\mathrm{BKS}(\beta) \cup \mathrm{BKS}(\delta_{S_a}) = \{\mathtt{B}_1, \ldots, \mathtt{B}_k, \mathtt{A}_1, \ldots, \mathtt{A}_m\}$ כך ש $\bar{S}_b(\beta) = T$ ו $\bar{S}_b(\delta_{S_a}) = F$. לפי משפטון 31.2, $S_b \restriction \{\mathtt{A}_1, \ldots, \mathtt{A}_m\} = S_a = S_c \restriction \{\mathtt{A}_1, \ldots, \mathtt{A}_m\}$. לכן, S_b ו S_c מסכימות על תחומן המשותף, ולכן יש השמת אמת S המרחיבה את שתיהן. $\bar{S}(\beta) = \bar{S}_b(\beta) = T$.

$\beta \Rightarrow \gamma$, לכן $\bar{S}(\gamma) = T$. מכאן, $\bar{S}_c(\gamma) = T$, וזה מה שרצינו להוכיח.

מקרה 2: יהיו $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ כל ה m־פיסקאות ε כך ש $\beta \Rightarrow \varepsilon$.

יהי

$$\alpha := \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n.$$

שוב, $\beta \Rightarrow \alpha$. נותר לנו להוכיח ש $\alpha \Rightarrow \gamma$.

תהי S_c השמת אמת המוגדרת על $\{\mathtt{A}_1, \ldots, \mathtt{A}_m, \mathtt{C}_1, \ldots, \mathtt{C}_l\}$, כך ש $\bar{S}_c(\alpha) = T$.

עלינו להראות שגם $\bar{S}_c(\gamma) = T$.

נרחיב את השמת האמת הזו להשמת אמת S כך ש $\bar{S}(\beta) = T$, ונשתמש בכך ש $\beta \Rightarrow \gamma$.

תהי $S_a := S_c \restriction \{\mathtt{A}_1, \ldots, \mathtt{A}_m\}$. $\bar{S}_a(\alpha) = T$, לכן לכל i, $\bar{S}_a(\alpha_i) = T$. לפי משפטון 31.2, כל α_i שונה מ δ_{S_a}. לכן, מבחירתנו את ה α_i־ים, $\beta \not\Rightarrow \delta_{S_a}$.

כלומר יש השמת אמת S_b על $\mathrm{BKS}(\beta) \cup \mathrm{BKS}(\delta_{S_a}) = \{\mathtt{B}_1, \ldots, \mathtt{B}_l, \mathtt{A}_1, \ldots, \mathtt{A}_m\}$ כך ש $\bar{S}_b(\beta) = T$ ו $\bar{S}_b(\delta_{S_a}) = F$. לפי משפטון 31.2, $S_b \restriction \{\mathtt{A}_1, \ldots, \mathtt{A}_m\} = S_a = S_c \restriction \{\mathtt{A}_1, \ldots, \mathtt{A}_m\}$. ולכן S_b ו S_c מסכימות על תחומן המשותף ויש השמת אמת S המרחיבה את שתיהן. $\bar{S}(\beta) = \bar{S}_b(\beta) = T$.

היות ש $\beta \Rightarrow \gamma$, $\bar{S}(\gamma) = T$. לכן $\bar{S}_c(\gamma) = T$, וזה מה שרצינו להוכיח. $\square$

34.2 הערה. כמובן, משפט השירבוב יהיה עדיין נכון אם $\mathrm{BKS}(\beta)\cap\mathrm{BKS}(\gamma)$ אינו מהצורה $\{\mathtt{A}_1,\ldots,\mathtt{A}_n\}$. באופן כללי:
אם $\beta\Rightarrow\gamma$, ו $\mathrm{BKS}(\beta)\cap\mathrm{BKS}(\gamma)$ אינו ריק, אזי יש פסוק α כך ש $BKS(\alpha)\subseteq\mathrm{BKS}(\beta)\cap\mathrm{BKS}(\gamma)$, ומתקיים $\beta\Rightarrow\alpha$ ו $\alpha\Rightarrow\gamma$.
אם $\beta\Rightarrow\gamma$, ו $\mathrm{BKS}(\beta)\cap\mathrm{BKS}(\gamma)=\emptyset$, אז לפחות אחד מהשניים $\neg\beta$ ו γ הוא טאוטולוגיה (ראה תרגיל 10.2).

מנקודת המבט שלנו, כל שני פסוקים שקולים טאוטולוגית α ו β הם בעלי אותה משמעות לוגית. לכן טבעי לחפש קבוצה קטנה של פסוקים, כך שלכל $\alpha\in\mathcal{L}$ יש פסוק β בקבוצה, כך ש $\alpha\Leftrightarrow\beta$. יש מספר אפיונים שימושיים לקבוצות כאלו. נתחיל ב:

35.2 הגדרה. קבוצה $\mathcal{C}\subseteq\mathcal{L}$ היא שלמה אם לכל $\alpha\in\mathcal{L}$ יש $\beta\in\mathcal{C}$ כך ש $\alpha\Leftrightarrow\beta$

36.2 הגדרה. תהי $I\subseteq\{\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow,|\}$. נגדיר את $\mathcal{L}_I$ להיות קבוצת כל הפסוקים שנבנים מבלוקים, בהשתמש בקשרים מ I בלבד. ברור ש $\mathcal{L}_I\subseteq\mathcal{L}$ ו $\mathcal{L}_I$ מבנה אינדוקטיבי.
נאמר ש I שלמה אם $\mathcal{L}_I$ שלמה.

37.2 עובדה. יהי @ קשר, ותהי I קבוצת קשרים, כך ש $I\cup\{@\}$ שלמה, ומתקיים:

אם $\alpha_1,\alpha_2\in\mathcal{L}_I$, אז יש $\beta\in\mathcal{L}_I$ כך ש $\beta\Leftrightarrow\alpha_1@\alpha_2$.

אזי I שלמה.
בדומה, אם $I\cup\{\neg\}$ שלמה, ומתקיים

אם $\alpha\in\mathcal{L}_I$, אז יש $\beta\in\mathcal{L}_I$ כך ש $\beta\Leftrightarrow\neg\alpha$

אזי I שלמה.

הוכחה. בהשתמש במבנה האינדוקטיבי של $\mathcal{L}_{I\cup\{@\}}$, ניתן להראות שלכל פסוק $\alpha\in\mathcal{L}_{I\cup\{@\}}$ יש פסוק $\bar{\alpha}\in\mathcal{L}_I$ כך ש $\bar{\alpha}\Leftrightarrow\alpha$:
כל הבלוקים של $\mathcal{L}_{I\cup\{@\}}$ נמצאים גם ב $\mathcal{L}_I$.
אם $\alpha=\beta\Delta\gamma$ עבור $\Delta\in I$, אזי מהנחת האינדוקציה יש לנו $\bar{\beta}$ ו $\bar{\gamma}$ ב $\mathcal{L}_I$, השקולים ל β ול γ בהתאמה. לכן, $\alpha\Leftrightarrow\bar{\beta}\Delta\bar{\gamma}$.
לבסוף, אם $\alpha=\beta@\gamma$, אזי $\alpha\Leftrightarrow\bar{\beta}@\bar{\gamma}$. מההנחה, $\bar{\beta}@\bar{\gamma}$ שקול לאיבר של $\mathcal{L}_I$.
□

38.2 משפט. הקבוצות הבאות שלמות:

1. $\mathcal{L}_{\{\neg,\wedge,\vee\}}$
2. $\mathcal{L}_{\{\neg,\wedge\}}$
3. $\mathcal{L}_{\{\neg,\vee\}}$

הוכחה. (1) לכל פסוק α, אם α אינו טאוטולוגיה, אז הצק"נ של α שייכת ל $\mathcal{L}_{\{\neg,\wedge,\vee\}}$.
אם α טאוטולוגיה, אז הצק"נ של α אינה מוגדרת, אך קל לראות ש

$$.\alpha \Leftrightarrow (\neg(\mathtt{A}_1 \wedge (\neg \mathtt{A}_1))) \in \mathcal{L}_{\{\neg,\wedge,\vee\}}$$

(2) היות ש $\alpha_1 \vee \alpha_2 \Leftrightarrow \neg(\neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2)$, נוכל להפעיל את עובדה 37.2.
(3) דומה. □

39.2 משפטון.

א. $\{\neg\}$ אינה שלמה.

ב. $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ אינה שלמה.

הוכחה. (1) מספיק להוכיח, שאין טאוטולוגיה ב $\mathcal{L}_{\{\neg\}}$. נראה באינדוקציה שלכל $\alpha \in \mathcal{L}_{\{\neg\}}$ יש השמות אמת S_1 ו S_2 כך ש $\bar{S}_1(\alpha) = T$ ו $\bar{S}_2(\alpha) = F$.
אם α בלוק, הטענה ברורה.
אם $\alpha = (\neg\beta)$, אז מהנחת האינדוקציה יש S_1 ו S_2 כך ש $\bar{S}_1(\beta) = T$ ו $\bar{S}_2(\beta) = F$. לכן $\bar{S}_1(\alpha) = \bar{S}_1(\neg\beta) = F$, ו $\bar{S}_2(\alpha) = \bar{S}_2(\neg\beta) = T$, ולכן הטענה נכונה במקרה זה.
(2) תרגיל. □

40.2 משפט. השפה $\mathcal{L}_|$ שלמה.

הוכחה. אנו כבר יודעים שהשפה $\mathcal{L}_{\neg,\wedge}$ שלמה, ולכן גם השפה $\mathcal{L}_{|,\neg,\wedge}$ שלמה. היות ש

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Leftrightarrow \neg(\alpha_1 | \alpha_2)$$

נוכל להסיק מלמה 37.2 שגם $\mathcal{L}_{|,\neg}$ שלמה. היות ש

$$\neg\alpha \Leftrightarrow (\alpha|\alpha)$$

נוכל להשתמש שוב במשפטון 37.2 לקבל ש $\mathcal{L}_|$ שלמה. □

תרגילים

השמות אמת

1.2 תרגיל. מצא כמה השמות אמת שונות, המוגדרות על הבלוקים $\mathtt{A}_1, \ldots, \mathtt{A}_n$, מספקות את הפסוקים הבאים

$$\{\neg\mathtt{A}_1 \vee \mathtt{A}_2, \neg\mathtt{A}_2 \vee \mathtt{A}_3, \ldots, \neg\mathtt{A}_i \vee \mathtt{A}_{i+1}, \ldots, \neg\mathtt{A}_{n-1} \vee \mathtt{A}_n\}$$

טאוטולוגיות

2.2 תרגיל. הוכח את 5.2.

3.2 תרגיל. הוכח שחוקי דה־מורגן הם טאוטולוגיות:

$$\begin{array}{ccc}(\neg(\alpha\vee\beta)) & \leftrightarrow & ((\neg\alpha)\wedge(\neg\beta))\\ (\neg(\alpha\wedge\beta)) & \leftrightarrow & ((\neg\alpha)\vee(\neg\beta))\end{array}$$

4.2 תרגיל. כתוב את טבלת האמת עבור הפסוקים הבאים. אילו מהם טאוטולוגיות?

1. $((\mathtt{A}\leftrightarrow(\mathtt{B}\wedge\mathtt{C}))\vee((\neg\mathtt{B})\leftrightarrow(\neg\mathtt{A})))$
2. $(((\mathtt{A}_1\leftrightarrow\mathtt{A}_2)\leftrightarrow\mathtt{A}_2)\leftrightarrow\mathtt{A}_2)$
3. $(((\neg\mathtt{A}_1)\leftrightarrow\mathtt{A}_2)\wedge(\neg(\mathtt{A}_1\vee(\neg\mathtt{A}_2))))$
4. $((\mathtt{A}_1\leftrightarrow((\mathtt{A}_2\leftrightarrow\mathtt{A}_3)\wedge(\mathtt{A}_3\leftrightarrow\mathtt{A}_2)))\leftrightarrow((\mathtt{A}_1\wedge(\mathtt{A}_2\wedge\mathtt{A}_3))\vee((\neg\mathtt{A}_1)\wedge((\neg\mathtt{A}_2)\wedge(\neg\mathtt{A}_3)))))$

5.2 תרגיל. אילו מהבאים נכונים לכל $\alpha,\beta\in\mathcal{L}$?

1. אם α ו β טאוטולוגיות, אז $\alpha\wedge\beta$ טאוטולוגיה.
2. אם α טאוטולוגיה או β טאוטולוגיה, אז $\alpha\vee\beta$ טאוטולוגיה.
3. אם $\alpha\wedge\beta$ טאטולוגיה, אז α טאטולוגיה וכן β טאוטולוגיה.
4. אם $\alpha\vee\beta$ טאטולוגיה, אז α טאוטולוגיה או β טאוטולוגיה.

6.2 תרגיל. יהיו α, β, γ פסוקים. הוכח שהנוסחאות הבאות הן טאוטולוגיות:

1. $((\alpha\vee\beta)\vee\gamma))\leftrightarrow(\alpha\vee(\beta\vee\gamma))$.
2. $((\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma)\leftrightarrow(\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma))$.
3. $((\alpha\wedge\beta)\vee\gamma)\leftrightarrow((\alpha\vee\gamma)\wedge(\beta\vee\gamma))$.
4. $(\alpha\leftrightarrow(\neg(\neg\alpha)))$.
5. $(\neg(\alpha\vee\beta))\leftrightarrow(\neg\alpha\wedge\neg\beta)$.

7.2 תרגיל. יהי α פסוק, כך שהקשר היחיד שמופיע ב α הוא $\leftrightarrow$. הוכח שאם כל בלוק שמופיע ב α, מופיע מספר זוגי של פעמים, אז α טאוטולוגיה. האם הכיוון השני של הטענה נכון אף הוא? הסבר!

רמז: ראשית הראה ש $(\alpha\leftrightarrow\beta)\leftrightarrow\gamma\Leftrightarrow\alpha\leftrightarrow(\beta\leftrightarrow\gamma)$. לאחר מכן, הוכח באינדוקציה: אם $\mathtt{A}_{i_1},\mathtt{A}_{i_2},\ldots,\mathtt{A}_{i_k}$ הם הבלוקים שמופיעים מספר איזוגי של פעמים ב α, אז

$$\alpha\Leftrightarrow((\cdots(\mathtt{A}_{i_1}\leftrightarrow\mathtt{A}_{i_2})\leftrightarrow\cdots)\leftrightarrow\mathtt{A}_{i_k})$$

היחס $\Rightarrow$

8.2 תרגיל. בהינתן קבוצה A, אנו אומרים שהיחס $\mathcal{R}$ על A הוא:

- רפלקסיבי אם $a\mathcal{R}a$ לכל $a \in A$.
- סימטרי אם $a\mathcal{R}b$ גורר ש $b\mathcal{R}a$ לכל $a, b \in A$.
- טרנזיטיבי אם $a\mathcal{R}b$ ו $b\mathcal{R}c$ גוררים ש $a\mathcal{R}c$ לכל $a, b, c \in A$.

יחס $\mathcal{R}$ הוא יחס שקילות אם הוא רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי. הראה שהיחס $\alpha \Leftrightarrow \beta$ (הגדרה 6.2) הוא יחס שקילות על $\mathcal{L}$.

9.2 תרגיל. הוכח את משפטון 8.2:
(1) אם $\alpha \Rightarrow \beta$ וכן $\beta \Rightarrow \gamma$, אזי $\alpha \Rightarrow \gamma$.
(2) אם α טאוטולוגיה, ו $\alpha \Rightarrow \beta$, אז גם β טאוטולוגיה.

10.2 תרגיל. הוכח שאם $\beta \Rightarrow \gamma$, ו $\mathrm{BKS}(\beta) \cap \mathrm{BKS}(\gamma) = \emptyset$, אזי γ או $(\neg\beta)$ (או שניהם) טאוטולוגיה.

11.2 תרגיל. הוכח ש $\alpha \wedge \beta \Rightarrow \gamma$ אם ורק אם $\alpha \Rightarrow (\beta \to \gamma)$.

12.2 תרגיל.

(א) הוכח ש $\alpha \wedge \beta \Leftrightarrow \alpha \wedge (\alpha \to \beta)$.

(ב) הוכח ש $\alpha \wedge \gamma \Rightarrow \beta$ אם ורק אם $\gamma \Rightarrow (\alpha \to \beta)$.

13.2 תרגיל. הוכח שהבאים שקולים:

1. α טאוטולוגיה.
2. לכל β, $\beta \Rightarrow \alpha$.
3. לכל β, $\neg\alpha \Rightarrow \beta$.

14.2 תרגיל. הוכח או הפרך (על ידי דוגמא נגדית) את הטענות הבאות לכל α, β.

(א) אם $\Gamma \Rightarrow \alpha$ או $\Gamma \Rightarrow \beta$, אזי $\Gamma \Rightarrow (\alpha \vee \beta)$.

(ב) אם $\Gamma \Rightarrow \alpha$ ו $\Gamma \Rightarrow \beta$, אזי $\Gamma \Rightarrow (\alpha \wedge \beta)$.

(ג) אם $\Gamma \Rightarrow (\alpha \vee \beta)$, אזי $\Gamma \Rightarrow \alpha$ או $\Gamma \Rightarrow \beta$.

(ד) אם $\Gamma \Rightarrow (\alpha \wedge \beta)$, אזי $\Gamma \Rightarrow \alpha$ וכן $\Gamma \Rightarrow \beta$.

צורות נורמליות

תרגיל 15.2. הוכח את משפטון 24.2:

1. יהי $\alpha = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$, ותהי S השמת אמת המוגדרת על $\mathrm{BKS}(\alpha)$. אזי $\bar{S}(\alpha) = T$ אם ורק אם לכל $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\bar{S}(\alpha_i) = T$.
2. יהי $\alpha = \alpha_1 \vee \cdots \vee \alpha_n$, ותהי S השמת אמת המוגדרת על $\mathrm{BKS}(\alpha)$. אזי $\bar{S}(\varphi) = T$ אם ורק אם יש $i \in \{1, \ldots, n\}$ כך ש $\bar{S}(\psi_i) = T$.

תרגיל 16.2. הוכח שאם α מורכבת מבלוקים ו $\wedge$ בלבד, אזי $\bar{S}(\alpha) = T$ אם ורק אם לכל בלוק $\mathtt{A}_i$ המופיע ב α, $\bar{S}(\mathtt{A}_i) = T$.

תרגיל 17.2. נסח והוכח טענה דומה עבור הקשר $\vee$.

תרגיל 18.2. מצא מבנה אינדוקטיבי עם קבוצת בלוקים $\{\mathtt{A}_1, \neg\mathtt{A}_1\}$ ושתי פעולות אונאריות, שמייצר את כל הפיסקאות.

תרגיל 19.2. הוכח את משפטון 26.2: יש 2^n n־פיסקאות.

תרגיל 20.2. פסוק α נקרא n־פיסקה דואלית, אם α מהצורה $\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_n$, כאשר כל β_i הוא $\mathtt{A}_i$ או $(\neg\mathtt{A}_i)$. פסוק הוא ב(n־)צורה דיסיונקטיבית נורמלית (צד"נ) אם הוא מהצורה $\gamma_1 \vee \cdots \vee \gamma_k$, כאשר כל γ_j הוא n־פיסקה דואלית.
הוכח שלכל פסוק α, או ש $\neg\alpha$ טאוטולוגיה, או שיש פסוק $\bar{\alpha}$ בצד"נ כך ש $\bar{\alpha} \Leftrightarrow \alpha$.

תרגיל 21.2. מצא את הצק"נ ואת הצד"נ (ראה תרגיל קודם) של הפסוקים הבאים:

1. $\mathtt{A}_1 \rightarrow \mathtt{A}_2$
2. $\mathtt{A}_1 \wedge \mathtt{A}_2 \wedge \mathtt{A}_3$
3. $\mathtt{A}_1 \vee \mathtt{A}_2 \vee \mathtt{A}_3$
4. $\mathtt{A}_1 \rightarrow (\mathtt{A}_2 \rightarrow \mathtt{A}_1)$

תרגיל 22.2. הוכח שאם $\gamma \Leftrightarrow \beta$, אז יש α כך ש $\mathrm{BKS}(\alpha) \subseteq \mathrm{BKS}(\beta) \cap \mathrm{BKS}(\gamma)$ ומתקיים

$$\alpha \Leftrightarrow \beta (\Leftrightarrow \gamma).$$

שפות שלמות

תרגיל 23.2. השתמש בעובדה 37.2 להראות (ישירות, מבלי להשתמש בצק"נ או בצד"נ) שהקבוצות הבאות שלמות:

1. $\{\neg, \vee, \rightarrow, \wedge, \leftrightarrow\}$
2. $\{\neg, \vee, \rightarrow, \wedge\}$

3. $\{\neg, \vee, \rightarrow\}$

4. $\{\neg, \rightarrow\}$

5. $\{\neg, \vee\}$

24.2 תרגיל. השלם את ההוכחה של משפט 38.2: הראה ש $\mathcal{L}_{\vee,\neg}$ ו $\mathcal{L}_{\rightarrow,\neg}$ שפות שלמות.

25.2 תרגיל. הוכח את משפטון 39.2(ii): $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ אינה שלמה (רמז: התבונן בהשמת האמת S שמתאימה T לכל בלוק).

26.2 תרגיל. השלם את הוכחת משפטון 40.2.

שפות אחרות

27.2 תרגיל. נתבונן בשפה המעודכנת $\mathcal{L}'$ של לוגיקה פסוקית, כאשר יש קשר נוסף ∇, "גמלו", עם הפירוש $\alpha\nabla\beta$ = "לא α וגם לא β".

(א) הגדר את $\mathcal{L}'$, אינדוקטיבית, ועדכן את הגדרה 2.2 בהתאם.

(ב) הגדר את $\mathcal{L}_\nabla$ באופן אנאלוגי להגדרה 36.2, והראה ש $\mathcal{L}_\nabla$ שלמה.

28.2 תרגיל. נתבונן בשפה המעודכנת $\mathcal{L}''$ של לוגיקה פסוקית, כאשר יש קשר נוסף $+$, עם הפירוש $\alpha + \beta$ = "α או β, אך לא שניהם" (קשר זה נקרא "או מוציא", בניגוד ל "או כולל" $\vee$). נוסיף גם שני בלוקים מיוחדים 0 ו 1, ונדרוש שלכל השמת אמת S, $\bar{S}(0) = F$ ו $\bar{S}(1) = T$.

(א) הגדר את $\mathcal{L}''$ אינדוקטיבית, ועדכן את הגדרה 2.2 בהתאם.

(ב) הראה שלכל $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{L}''$:

1. $\alpha \wedge \beta \Leftrightarrow \beta \wedge \alpha$
2. $\alpha + \beta \Leftrightarrow \beta + \alpha$
3. $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \Leftrightarrow (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$.
4. $\alpha + (\beta + \gamma) \Leftrightarrow (\alpha + \beta) + \gamma$.
5. $\alpha \wedge (\beta + \gamma) \Leftrightarrow (\alpha \wedge \beta) + (\alpha \wedge \gamma)$.
6. $\alpha + 0 \Leftrightarrow \alpha$
7. $\alpha \wedge 0 \Leftrightarrow 0$
8. $\alpha + 1 \Leftrightarrow \neg\alpha$
9. $\alpha \wedge 1 \Leftrightarrow \alpha$

(ג) הגדר את $\mathcal{L}''_{1,+,\wedge}$ והראה שזו שפה שלמה.

פרק 3

משפט הקומפקטיות עבור לוגיקה פסוקית

1.3 הגדרה. קבוצה X נקראת בת מניה אם היא סופית, או שיש פונקציה $f: \mathbb{N} \to X$ שהיא על. נקרא ל $\{f(0), f(1), \ldots\}$ מיספור של X.

2.3 הגדרה. פונקציה חד־חד ערכית ועל תיקרא מיפוי.

3.3 הערה. הקבוצה הריקה סופית ולכן, לפי ההגדרה, היא בת מניה. כמו כן:

1. אם X בת מניה, ו $f: X \to Y$ על, אז גם Y בת מניה.
2. אם X ו Y בנות מניה ואינסופיות, אז יש מיפוי $f: X \to Y$.

4.3 דוגמא.

1. ברור ש $\mathbb{N}$ בת מניה.
2. קבוצת המספרים הזוגיים,

$$E = \{m \in \mathbb{N} : \exists n \in \mathbb{N}(m = 2n)\}$$

היא בת מניה. נגדיר $f(n) = 2n$.

3. קבוצת המספרים השלמים $\mathbb{Z}$ היא בת מניה

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}.$$

5.3 דוגמא. ניתן להציג את $\mathbb{N}$ כאיחוד אינסופי של קבוצות אינסופיות זרות זו לזו, כאשר כל קבוצה היא בת מניה.

יהיו

$$\begin{array}{rcl} T_0 & = & \{0,1,3,5,7,9,\ldots\} = \{0\} \cup \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\} \\ T_1 & = & \{2,6,10,14,18,\ldots\} \\ T_2 & = & \{4,12,20,28,36,\ldots\} \\ \vdots & & \\ T_n & = & \{2^n \cdot m : m \in T_0, m \neq 0\} \\ \vdots & & \end{array}$$

כדי לראות שהקבוצות T_n זרות, נניח ש $x \in T_i \cap T_j$. בלי הגבלת כלליות, $i < j$, וברור ש $i > 0$. אזי $x = 2^i \cdot m = 2^j \cdot n$, לאיזשהם $m, n \in T_0 \setminus \{0\}$. אבל אז, $m = 2^{j-i} \cdot n$, וזה גורר ש m זוגי. בסתירה לכך ש $m \in T_0 \setminus \{0\}$.

ההוכחה שכל מספר טבעי נמצא באיזשהו T_n היא באינדוקציה, ונשאיר אותה כתרגיל.

6.3 משפטון.

1. כל תת קבוצה של קבוצה בת מניה היא בת מניה.
2. איחוד אוסף בן מניה של קבוצות בנות מניה הוא בן מניה.
3. מכפלה חיצונית של מספר סופי של קבוצות בנות מניה היא בת מניה.

הוכחה. (1) תרגיל.

(2) יהי $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ אוסף בן מניה של קבוצות בנות מניה. נניח שכל A_i אינסופית, ונשאיר את המקרה הסופי כתרגיל.

כדי להראות ש $A = \bigcup\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ בת מניה, נקשר כל A_i עם ה T_i מהדוגמא הקודמת. בהינתן $i \in \mathbb{N}$, T_i וכן A_i הן בנות מניה ואינסופיות, לכן יש מיפוי $f_i : T_i \to A_i$. כעת,

$$\begin{array}{rcl} A_0 & = & \{f_0(0), f_0(1), f_0(3), \ldots\} \\ A_1 & = & \{f_1(2), f_1(6), \ldots\} \\ \vdots & & \end{array}$$

ואפשר להגדיר פונקציה $f : \mathbb{N} \to A$, שהיא על. בהינתן $n \in \mathbb{N}$, יש i יחיד כך ש $n \in T_i$. לכן n נמצא בתחום של f_i, ונוכל להגדיר

$$f(n) = f_i(n)$$

מתקיים $A = \{f(0), f(1), f(2), \ldots\}$.

(3) תהיינה X ו Y בנות מניה ואינסופיות. כדי להראות ש

$$X \times Y = \{(x,y) : x \in X, y \in Y\}$$

בת מניה, נכתוב את $X \times Y$ בצורה

$$\{(x_0, y) : y \in Y\} \cup \{(x_1, y) : y \in Y\} \cup \cdots \quad ,$$

כאשר $\{x_0, x_1, \ldots\}$ היא מיספור של X. כל $\{(x_i, y) : y \in Y\}$ בת מניה, לכן $X \times Y$ היא איחוד בן מניה של קבוצות בנות מניה, ולפי (ii), $X \times Y$ בת מניה.
לכן המכפלה החיצונית של 2 קבוצות בנות מניה היא בת מניה. ההכללה ל $n \in \mathbb{N}$ כלשהו היא באינדוקציה על n. □

7.3 דוגמא.

(א) קבוצת המספרים הרציונלים $\mathbb{Q}$ היא בת מניה.

(ב) קבוצת המספרים הממשיים $\mathbb{R}$ אינה בת מניה.

הוכחה. (א). ראינו ש $\mathbb{Z}$ בת מניה. לפי משפטון 6.3(iii), $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ בת מניה. לכן גם $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ בת מניה, לפי משפטון 6.3(1).
כעת נגדיר $f : \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \to \mathbb{Q}$ על ידי $f(m, n) = \dfrac{m}{n}$. קל לראות ש f על, ולכן לפי 3.3, $\mathbb{Q}$ בת מניה.

(ב) . לפי 6.3(1), מספיק להראות ש $\mathbb{R} \cap [0, 1)$ אינה בת מניה. נניח בשלילה, שיש מיספור $\{r_0, r_1, \ldots\}$ של $\mathbb{R} \cap [0, 1)$. נכתוב כל r_j בפיתוחו העשרוני:

$$\begin{aligned} r_0 &= 0.d_{0,0}d_{1,0}d_{2,0}\cdots \\ r_1 &= 0.d_{0,1}d_{1,1}d_{2,1}\cdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

(כאן, $d_{i,0}$ היא הספרה ה $i+1$ מימין לנקודה העשרונית בפיתוח המספר הממשי r_0. פורמאלית, ניתן לקבל את $d_{i,0}$ על ידי

$$d_{i,0} = \lfloor 10^{i+1} r_0 \rfloor \bmod 10$$

כאשר $\lfloor x \rfloor$ הוא החלק השלם של x, ו $\bmod 10$ פירושו לקיחת השארית שנותרת מחלוקה ב 10. שאר ה $d_{i,j}$־ים מתקבלים באופן דומה מה־r_j־ים).
נראה שיש איבר של $\mathbb{R} \cap [0, 1)$ ששונה מכל ה r_j־ים. לכל $n \in \mathbb{N}$, נגדיר

$$e_n = \begin{cases} 7 & d_{n,n} \neq 7 \text{ אם} \\ 5 & d_{n,n} = 7 \text{ אם} \end{cases}$$

כעת, יהי $r = 0.e_0e_1e_2\cdots$ (פורמאלית, $r = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e_i}{10^{i+1}}$). אזי, לכל $n \in \mathbb{N}$, $r \neq r_n$, היות ש $e_n \neq d_{n,n}$. □

(הערה: ייתכן שיהיו שני פיתוחים עשרוניים שונים המייצגים את אותו המספר, למשל $0.4999\ldots = 0.5000\ldots$, אולם זה קורה רק כאשר אחד הפיתוחים מסתיים בשרשרת אינסופית של 9־יות, והשני – בשרשרת אינסופית של 0־ים. על כל פנים, בניית r הבטיחה שלא יקרה מצב זה, שכן השתמשנו רק בספרות 5 ו 7).
כעת נביא תוצאה שימושית הנובעת ממשפטון 6.3:

8.3 תוצאה. תהי $\mathcal{L}$ השפה של לוגיקת תחשיב הפסוקים. אזי $\mathcal{L}$ בת מניה.

הוכחה. תהיינה $S = B \cup F \cup \{(,)\}$ ו S^+ כמוגדר ב 10.1. $\mathcal{L} \subseteq S^+$, לכן מספיק להראות ש S^+ בת מניה.
קבוצת הבלוקים B בת מניה; F ו $\{(,)\}$ סופיות, לכן S בת מניה, ולכן לכל $k \in \mathbb{N}$, S^k בת מניה כמכפלה סופית של קבוצות בנות מניה. לכן, $S^+ = \bigcup\{S^k : k \in \mathbb{N}\}$, בת מניה כאיחוד בן מניה של קבוצות בנות מניה. $\square$

כעת ניתן יישום חשוב של הכלים שרכשנו עד כה עבור לוגיקת תחשיב פסוקים.
תהי $\Phi \subseteq \mathcal{L}$ קבוצת פסוקים. נאמר ש Φ ניתנת לסיפוק אם יש השמת אמת S המספקת את Φ.

1.3 משפט (משפט הקומפקטיות עבור לוגיקה פסוקית)**.** תהי Φ קבוצת פסוקים. אזי Φ ניתנת לסיפוק אם ורק אם כל תת קבוצה סופית של Φ ניתנת לסיפוק.

הוכחה. נכתוב $\Phi = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$. נשמיט את הכיוון הטריויאלי ונניח שכל תת קבוצה סופית של Φ ניתנת לסיפוק. כדי להראות ש Φ ניתנת לסיפוק, נבנה השמת אמת S על הבלוקים שמופיעים בפסוקים של Φ, כך ש $\bar{S}(\alpha) = T$, לכל $\alpha \in \Phi$.
ראשית, תהי $B_0 = \emptyset$, ולכל $n > 0$ תהי B_n קבוצת הפסוקים המופיעים ב α_n, ותהי $B = B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cdots$.
נתחיל את הבניה עם ההשמה ה"ריקה" S_0 ($S_0(\mathtt{A})$ אינה מוגדרת לאף בלוק $\mathtt{A}$).
נראה, שבהינתן השמת אמת S_n על $B_0 \cup \cdots \cup B_n$, המספקת את $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, נוכל להרחיב את S_n להשמת אמת S_{n+1} על $B_0 \cup \cdots \cup B_{n+1}$, המספקת את $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}\}$. לבסוף, ניקח את האיחוד של כל ההשמות האלו, לקבל השמת אמת S המספקת את Φ.
תהי S_n השמת אמת על $B_0 \cup \cdots \cup B_n$, המספקת את $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. נאמר ש S_n היא k־טובה אם יש השמת אמת S על $B_0 \cup \cdots \cup B_{n+k}$ כך ש

1. S הרחבה של S_n
2. S מספקת את $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+k}\}$.

אם S_n היא k־טובה לכל $k \in \mathbb{N}$, נאמר ש S_n טובה מאד.
טענה 1: לכל $k \in \mathbb{N}$, S_0 k־טובה, כלומר S_0 טובה מאד.

הוכחה. נקבע מספר טבעי k. מההנחה, $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ ניתנת לסיפוק, לכן תהי S השמת אמת על B_1 המספקת את $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$. היות ש S מרחיבה את S_0, S_0 k־טובה.
החלק המרכזי של ההוכחה הוא הטענה הבאה:
טענה 2: תהי S_n השמת אמת על $B_0 \cup \cdots \cup B_n$, כך ש S_n טובה מאד, אזי יש השמת אמת S_{n+1} על $B_0 \cup \cdots \cup B_{n+1}$ כך ש

1. S_{n+1} הרחבה של S_n
2. S_{n+1} מספקת את $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}\}$
3. S_{n+1} טובה מאד.

הוכחה. S_n טובה מאד, ולכן מספקת את $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, והיא בפרט 1־טובה. לכן יש השמת אמת S_{n+1}על $B_0 \cup \cdots \cup B_{n+1}$ המרחיבה את S_n ומספקת את $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}\}$. למעשה, יתכן שיש יותר מהשמה אחת כזאת. לכן, (1) ו (2) מתקבלים בקלות. הבעיה היא, כשברצוננו להבטיח שאחת ההשמות היא טובה מאד.

תהי $\mathcal{S}_{n+1}$ קבוצת כל השמות האמת המוגדרות על $B_0 \cup \cdots \cup B_{n+1}$, מרחיבות את S_n, ומספקות את $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}\}$. S_n טובה מאד, ולכן לכל $k \in \mathbb{N}$, S_n $k+1$־טובה, ולכן יש השמה ב $\mathcal{S}_{n+1}$, שהיא k־טובה. לכן, לכל $k \in \mathbb{N}$ יש השמה k־טובה ב $\mathcal{S}_{n+1}$. $\mathcal{S}_{n+1}$ סופית, לכן יש השמה טובה מאד ב $\mathcal{S}_{n+1}$. $\square$

בזאת הוכחה טענה 1. $\square$

כעת אנו מוכנים לבניה האינדוקטיבית של השמת האמת S, שמספקת את Φ. נתחיל עם S_0. בהינתן השמת אמת טובה מאד S_n על $B_0 \cup \cdots \cup B_n$, נשתמש בטענה 2 לבחור הרחבה S_{n+1} של S_n, שמספקת את $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}\}$, והיא טובה מאד בעצמה.

טענה 3: $S = \bigcup\{S_n : n \in \mathbb{N}\}$ מספקת את Φ.

הוכחה. S מוגדרת היטב, שכן מהבניה, כל S_{n+1} היא הרחבה של S_n. כעת יהי $\alpha \in \Phi$. אזי $\alpha = \alpha_n$, עבור איזשהו $n \in \mathbb{N}$. S_n מספקת את $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, לכן S_n מספקת את α_n. S הרחבה של S_n, לכן S מספקת את $\alpha_n = \alpha$. $\square$

בזאת מסתיימת הוכחת משפט 1.3. $\square$

9.3 תוצאה. תהי Φ קבוצת פסוקים, ויהי α פסוק. אזי

$\Phi \Rightarrow \alpha$ אם ורק אם יש $\Phi_0 \subseteq \Phi$ סופית כך ש $\Phi_0 \Rightarrow \alpha$.

הוכחה. תרגיל 5.3. $\square$

כעת נראה יישום מעניין של משפט הקומפקטיות עבור לוגיקה פסוקית.

מפה היא זוג סדור $\langle C, N\rangle$, כאשר C מתפרשת כקבוצת מדינות, ו N היא אוסף זוגות (לא סדורים) $\{c, c'\}$ מ C. אם c ו d שייכים ל C, והזוג $\{c, d\}$ שייך ל N, אנו מפרשים זאת כ"ל c ול d יש גבול משותף". במקרה זה, נאמר ש c ו d שכנות. אם C אינה סופית, נקרא ל $\langle C, N\rangle$ מפה אינסופית. תת־מפה של $\langle C, N\rangle$ היא מפה $\langle C', n'\rangle$, כאשר $C' \subseteq C$, ו $N' \subseteq N$.

מפה $\langle C, N\rangle$ ניתנת לצביעה בארבעה צבעים אם

> לכל מדינה ניתן להתאים בדיוק צבע אחד מארבעה, כך שלכל שתי שכנות יש צבעים שונים

במלים אחרות,

> אם יש פונקציה $F : C \to \{1, 2, 3, 4\}$ כך ש $F(c) \neq F(d)$ לכל $\{c, d\} \in N$.

נקרא ל F צביעה של $\langle C, N\rangle$.

10.3 דוגמא. מפה אינסופית ניתנת לצביעה בארבעה צבעים אם ורק אם כל תת־מפה סופית שלה ניתנת לצביעה בארבעה צבעים.

הוכחה. תהי $\langle C, N\rangle$ מפה אינסופית, עם קבוצת מדינות $\{c_1, c_2, \dots\}$. ברצוננו לצבוע את C עם ארבעת הצבעים $\{1,2,3,4\}$.
נשתמש באוסף אינסופי של בלוקים:

$$\begin{array}{ll}\{ & \mathtt{A}_{1,1}, \mathtt{A}_{2,1}, \mathtt{A}_{3,1}, \mathtt{A}_{4,1}, \mathtt{A}_{5,1} \dots \\ & \mathtt{A}_{1,2}, \mathtt{A}_{2,2}, \mathtt{A}_{3,2}, \mathtt{A}_{4,2}, \mathtt{A}_{5,2} \dots \\ & \mathtt{A}_{1,3}, \mathtt{A}_{2,3}, \mathtt{A}_{3,3}, \mathtt{A}_{4,3}, \mathtt{A}_{5,3} \dots \\ & \mathtt{A}_{1,4}, \mathtt{A}_{2,4}, \mathtt{A}_{3,4}, \mathtt{A}_{4,4}, \mathtt{A}_{5,4} \dots \quad \}\end{array}$$

(כאשר כל הבלוקים שונים). הפירוש של $\mathtt{A}_{i,j}$ הוא: מדינה c_i תיצבע בצבע j.
תהי Φ הקבוצה המכילה את שלשת הטיפוסים הבאים של פסוקים

1. $\mathtt{A}_{i,j} \to \neg\mathtt{A}_{i',j}$ וכן $\mathtt{A}_{i',j} \to \neg\mathtt{A}_{i,j}$, כאשר $j \in \{1,2,3,4\}$ ו $\{c_i, c_{i'}\} \in N$ מדינות שכנות.
2. $\mathtt{A}_{i,1} \vee \mathtt{A}_{i,2} \vee \mathtt{A}_{i,3} \vee \mathtt{A}_{i,4}$, לכל i.
3. $\mathtt{A}_{i,j} \to \neg\mathtt{A}_{i,j'}$, כאשר $j \neq j'$.

הפסוקים מטיפוס (1) אומרים שאם c_i ו $c_{i'}$ שכנות, ול c_i יש צבע j, אז ל $c_{i'}$ אין אותו צבע j. לכל זוג $\{c_i, c_{i'}\} \in N$ של שכנות, Φ מכילה שמונה פסוקים מטיפוס זה, והקוניונקציה של פסוקים אלו אומרת של c_i ול $c_{i'}$ אין אותו צבע.
הפסוקים מטיפוס (2) אומרים, שלמדינה יש לפחות צבע אחד מתוך הארבעה. לכל $c_i \in C$, Φ מכילה פסוק אחד מטיפוס זה.
הפסוקים מטיפוס (3) אומרים, שאם למדינה יש צבע j, אז אין לה צבע $j' \neq j$. לכל מדינה $c_i \in C$, Φ מכילה תריסר פסוקים מטיפוס זה, והקוניונקציה של תריסר פסוקים אלו אומרת של c_i יש לכל היותר צבע אחד.
נניח שכל תת־מפה סופית של $\langle C, N\rangle$ ניתנת לצביעה בארבעה צבעים. נראה שכל תת קבוצה סופית של Φ ניתנת לסיפוק, ואז לפי משפט הקומפקטיות, Φ ניתנת לסיפוק. לבסוף, נראה שזה גורר ש $\langle C, N\rangle$ ניתנת לצביעה בארבעה צבעים.
תהי Σ תת קבוצה סופית של Φ. תהי $C(\Sigma)$ קבוצת כל המדינות $c_i \in C$ כך שיש $j \in \{1,2,3,4\}$ כך ש $\mathtt{A}_{i,j}$ מופיע באחד הפסוקים $\sigma \in \Sigma$. פורמאלית,

$$C(\Sigma) = \{c \in C : (\exists \sigma \in \Sigma)(\exists j \in \{1,2,3,4\})(\mathtt{A}_{i,j} \in \mathrm{BKS}(\sigma))\},$$

Σ סופית, לכן $C(\Sigma)$ סופית. תהי $N(\Sigma) = \{\{c,d\} \in N : c, d \in C(\Sigma)\}$. אזי $\langle C(\Sigma), N(\Sigma)\rangle$ תת־מפה סופית של $\langle C, N\rangle$. מההנחה, $\langle C(\Sigma), N(\Sigma)\rangle$ ניתנת לצביעה בארבעה צבעים. תהי $F : C \to \{1,2,3,4\}$ צביעה של $\langle C(\Sigma), N(\Sigma)\rangle$. נגדיר השמת אמת S על $B(\Sigma)$ על ידי

$$S(\mathtt{A}_{i,j}) = T \text{ אם ורק אם } F(c_i) = j.$$

טענה: S מספקת את Σ.

הוכחה. יהי $\sigma \in \Sigma$. אם σ היא $\mathtt{A}_{i,j} \to \neg\mathtt{A}_{i',j}$, אז $\bar{S}(\mathtt{A}_{i,j} \to \neg\mathtt{A}_{i',j}) = F$ אם ורק אם $S(\mathtt{A}_{i,j}) = T$ ו $S(\mathtt{A}_{i',j}) = T$ אם ורק אם $F(c_i) = j$ ו $F(c_{i'}) = j$, בסתירה לכך ש F היא צביעה. לכן $\bar{S}(\sigma) = T$.

נניח ש σ הוא $\mathtt{A}_{i,1} \vee \mathtt{A}_{i,2} \vee \mathtt{A}_{i,3} \vee \mathtt{A}_{i,4}$. יהי $j = F(c_i)$. אזי $S(\mathtt{A}_{i,j}) = T$. j הוא אחד מ 4 ו $1, 2, 3$. לכן $\bar{S}(\sigma) = T$.

לבסוף, אם σ הוא $\mathtt{A}_{i,c} \to \neg\mathtt{A}_{i,d}$, אזי אם ניקח $F(c_i) = j$, לכל היותר אחד מ $S(A_{i,c})$, $S(A_{i,d})$ יכול להיות T – בהתאם לכך ש $j = c$ או $j = d$. לכן $\bar{S}(\sigma) = T$. $\square$

לכן, כל תת קבוצה סופית של Φ ניתנת לסיפוק. מהקומפקטיות, Φ ניתנת לסיפוק. תהי S השמת האמת שמספקת את Φ. נגדרי פונקציה $F : C \to \{1, 2, 3, 4\}$. נקבע מדינה c_i. אזי $\bar{S}(\mathtt{A}_{i,1} \vee \mathtt{A}_{i,2} \vee \mathtt{A}_{i,3} \vee \mathtt{A}_{i,4}) = T$, לכן יש לפחות איבר אחד $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ כך ש $S(\mathtt{A}_{i,j}) = T$. כמו כן, $\bar{S}(\mathtt{A}_{i,j} \to \neg\mathtt{A}_{i,j'}) = T$, לכל $j' \in \{1, 2, 3, 4\} - \{j\}$. לכן $S(\mathtt{A}_{i,j'}) = F$, לכל $j \neq j'$. לכן, j יחיד. נגדיר $F(c_i) = j$.

טענה: F היא צביעה של $\langle C, N \rangle$.

הוכחה. תרגיל. $\square$

$\square$

ניתן דוגמא נוספת ליישום משפט הקומפקטיות הפסוקי.

11.3 הגדרה. יחס בינארי $\prec$ על קבוצה A נקרא סדר חלקי אם הוא טרנזיטיבי ואנטיסימטרי, כלומר לכל $a, b, c \in A$,

(1) אם $a \prec b$ ו $b \prec c$, אזי $a \prec c$ ("$\prec$ טרנזיטיבי")

(2) אם $a \prec b$ אזי לא מתקיים $b \prec a$ ("$\prec$ אנטיסימטרי")

(בפרט, זה גורר ש $a \not\prec a$ לכל a).

יחס בינארי $<$ נקרא סדר שלם (לעיתים נקרא יחס סדר "טוטאלי" או "ליניארי") אם הוא סדר חלקי, ולכל $a, b \in A$,

(3) $b < a$ או $a = b$ או $a < b$ ("$<$ טריכוטומי").

נאמר שסדר חלקי $\prec$ ניתן להרחבה לסדר שלם אם יש סדר שלם $<$ שמשמר את הסדר החלקי (כלומר, אם $a \prec b$ אז $a < b$).

נראה, שכל סדר חלקי בן מניה ניתן להרחבה לסדר שלם, על ידי זה שנראה זאת ראשית עבור קבוצות סופיות, ולאחר מכן נשתמש במשפט הקומפקטיות.

12.3 הגדרה. יהי $\prec$ סדר חלקי על קבוצה X. איבר $x \in X$ נקרא מינימלי, אם אין $y \prec x$.

x נקרא ראשון, או קטן ביותר, אם לכל $y \in X$ השונה מ x, $x \prec y$.

13.3 הערה. בכל סדר חלקי יש לכל היותר איבר ראשון אחד. אם x ראשון, אז x מינימלי, אך ההיפך לא בהכרח מתקיים. בסדר שלם, אם יש איבר מינימלי, יש גם איבר ראשון. לא תמיד יש לסדר חלקי איבר מינימלי, אך לכל סדר חלקי סופי יש איבר מינימלי.

נשאיר את ההוכחה כתרגיל.

14.3 משפטון. לכל מספר טבעי $n > 0$: אם $(X, \prec)$ סדר חלקי עם n איברים, אזי יש סדר שלם $<$ על X שמרחיב את $\prec$.

הוכחה. באינדוקציה על n. אם $n = 1$, אז הסדר החלקי הוא שלם.
יהי $n = k + 1$,ויהי $\prec$ סדר חלקי על X, כאשר X קבוצה עם $k + 1$ איברים. יהי $x_0 \in X$ מינימלי. $X' := X - \{x_0\}$ היא קבוצה עם k איברים, הסדורה חלקית על ידי $\prec' := \{(x, y) : x \prec y,\, x, y \in X - \{x_0\}\}$. מהנחת האינדוקציה, יש סדר שלם $<'$ על X'. נגדיר סדר שלם על X: לכל $x, y \in X$,

$$x < y \text{ אם ורק אם } x <' y\text{, או } x = x_0 \neq y$$

יש לבדוק שזה אכן סדר שלם על X, שמרחיב את $\prec$:
טרנזיטיביות: אם $x < y < z$, אז y ו z שונים מ x_0, שכן x מינימלי. לכן, $y <' z$. אם $x = x_0$, אז $x < z$, אחרת, $x <' y <' z$, ולכן $x <' z$, ושוב $x < z$.
אנטיסימטריות: $x < x$ שקול ל "$x <' x$ או $x = x_0 \neq x$", שהוא מצב בלתי אפשרי.
טריכוטומיות: אם $x \neq y$, עלינו להראות ש $x < y$ או $y < x$. אם x או y שוים ל x_0, הטענה ברורה. אחרת, $x <' y$ או $y <' x$, ושוב מתקיימת הטענה.
לבסוף, אם $x \prec y$, אז $y \neq 0$. או ש $x = x_0$ (ולכן $x < y$), או שגם $x \neq x_0$, ולכן $x \prec' y$. לכן $x <' y$, ומכאן $x < y$. $\square$

15.3 משפט. אם $\prec$ סדר חלקי על קבוצה בת מניה X, אז $\prec$ ניתן להרחבה לסדר שלם על X.

הוכחה. תהי $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ (כל ה x_i־ים שונים). נשתמש בסמלים הפסוקיים:

$$\begin{array}{ll} \{ & \mathtt{A}_{1,1}, \mathtt{A}_{2,1}, \mathtt{A}_{3,1}, \mathtt{A}_{4,1}, \mathtt{A}_{5,1} \dots \\ & \mathtt{A}_{1,2}, \mathtt{A}_{2,2}, \mathtt{A}_{3,2}, \mathtt{A}_{4,2}, \mathtt{A}_{5,2} \dots \\ & \mathtt{A}_{1,3}, \mathtt{A}_{2,3}, \mathtt{A}_{3,3}, \mathtt{A}_{4,3}, \mathtt{A}_{5,3} \dots \\ & \mathtt{A}_{1,4}, \mathtt{A}_{2,4}, \mathtt{A}_{3,4}, \mathtt{A}_{4,4}, \mathtt{A}_{5,4} \dots \\ & \qquad\qquad \vdots \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad \} \end{array}$$

(שוב, אנו מניחים שכל הסמלים האלו שונים). הפירוש של $\mathtt{A}_{i,j}$ הוא: $x_i < x_j$.
תהי Φ הקבוצה המכילה את שלשת הטיפוסים הבאים של פסוקים

1. $\mathtt{A}_{i,j} \to \neg \mathtt{A}_{j,i}$ לכל i, j.
2. $\mathtt{A}_{i,j}$, כאשר $x_i \prec x_j$.
3. $\mathtt{A}_{i,j} \wedge \mathtt{A}_{j,k} \to \mathtt{A}_{i,k}$ לכל i, j, k.

4. $\mathtt{A}_{i,j} \vee \mathtt{A}_{j,i}$, כאשר $i \neq j$.

כעת אפשר להוכיח את הטענות הבאות:

טענה 1: כל תת קבוצה סופית של Φ ניתנת לסיפוק.

טענה 2: Φ ניתנת לסיפוק.

טענה 3: $\prec$ ניתן להרחבה לסדר שלם על X.

נשאיר את ההוכחה של טענה 1 לקורא. טענה 2 היא תוצאה ישירה של טענה 1, בעזרת משפט הקומפקטיות.

הוכחת טענה 3: תהי S השמת אמת המספקת את Φ. נגדיר את היחס $<$ על ידי

$$x_i < x_j \quad \text{אם ורק אם} \quad S(\mathtt{A}_{i,j}) = T$$

עלינו להראות ש $<$ הוא סדר שלם המרחיב את $\prec$. $<$ מרחיב את $\prec$, משום שאם $x_i \prec x_j$, אז $\mathtt{A}_{i,j} \in \Phi$, לפי (2), לכן $S(\mathtt{A}_{i,j}) = T$, ולכן $x_i < x_j$.

באופן דומה, $<$ מקיים את האקסיומות של סדר חלקי, בזכות (1) ו (3) לעיל.

לבסוף, $<$ הוא סדר שלם בזכות (4) לעיל. $\square$

תרגילים

קבוצות בנות מניה

1.3 תרגיל. הראה שכל תת קבוצה של קבוצה בת מניה היא בת מניה.

2.3 תרגיל. מצא קבוצה X שאינה בת מניה, וניתן להציגה כאיחוד אינסופי של קבוצות בנות מניה.

3.3 תרגיל. לכל אחת מהקבוצות הבאות, הוכח או הפרך את הטענה, שהקבוצה בת מניה.

(א) הקבוצה $S = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$

(ב) קבוצת כל המצבים האפשריים בשחמט.

(ג) קבוצת כל תת הקבוצות של $\mathbb{Z}$ (מסומנת $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$).

(ד) קבוצת כל תת הקבוצות הסופיות של $\mathbb{Z}$.

(ה) קבוצת כל הפונקציות $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

(ו) קבוצת הפונקציות הקבועות $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$

(ז) קבוצת כל היחסים האונאריים על $\mathbb{Z}$.

(ח) קבוצת כל תת הקבוצות של קבוצת האנשים בעולם.

(ט) קבוצת כל השמות האמת האפשריות על קבוצה בת מניה של בלוקים (הפרד לשני מקרים).

4.3 תרגיל. הוכח או הפרך את הטענה הבאה: אם C היא מבנה אינדוקטיבי עם מספר סופי של בלוקים ומספר סופי של פעולות, אז C בת מניה. מה קורה כאשר קבוצת הבלוקים בת מניה?

משפט הקומפקטיות עבור לוגיקה פסוקית

5.3 תרגיל.

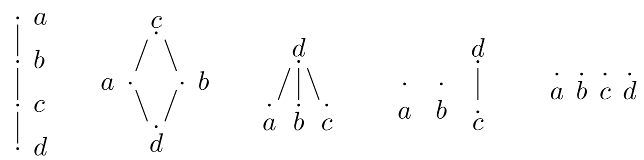
(א) הוכח את הטענה הבאה:

$\Phi \Rightarrow \alpha$ אם ורק אם $\Phi \cup \{\neg\alpha\}$ אינה ניתנת לסיפוק.

(ב) הוכח שתוצאה 9.3 שקולה למשפט הקומפקטיות.

6.3 תרגיל. השלם את הוכחת דוגמא 10.3.

7.3 תרגיל. ניתן להציג סדר חלקי על קבוצה סופית A בעזרת דיאגרמה. אברי הקבוצה מוצגים על ידי נקודות, ואם איבר b הוא עוקב מיידי של a (כלומר, $a < b$ ואין c כך ש $a < c < b$), נכתוב את b מעל a ונחבר בקו את a ל b.
למשל, אלו דיאגרמות של סדרים חלקיים על הקבוצה בת 4 האיברים $\{a, b, c, d\}$:



לכל אחד מהסדרים החלקיים האלו, הצג את כל הזוגות הסדורים (x, y) שמקיימים $x < y$, וזהה את כל האברים המינימליים והראשונים.

8.3 תרגיל. הוכח את 13.3.

9.3 תרגיל. השלם את הוכחת משפט 15.3.

חלק II

לוגיקה מסדר ראשון

פרק 4

השפה של הלוגיקה מסדר ראשון

בפרק זה נפתח שפה שניתן למצוא בכל ענפי המתמטיקה. ניתן להשתמש בוריאציות של שפה זו כדי לבטא כל משפט בתורת החבורות, כמו גם כל משפט בתורת הקבוצות. ההבדל יהיה בפרמטרים שישמשו לביטוי המושגים. למשל, לביטוי מושג ה"כפל" שבה משתמשים בתורת החבורות, ומושג ה"שייכות" שבו משתמשים בתורת הקבוצות. במלים אחרות, נלמד בצורה מופשטת את השפה, שבמקרה פרטי אחד היא השפה של תורת החבורות, ובמקרה פרטי אחר היא השפה של תורת הקבוצות, וכולי.

המתמטיקה מדברת על תכונות של אובייקטים שנמצאים בעולם נתון כלשהו. עולם טיפוסי הוא, למשל, קבוצת המספרים הטבעיים. לימוד עולם זה הוא הענף במתמטיקה, הקרוי תורת המספרים. משפטים פשוטים בתורת המספרים הם, למשל:

3 קטן מ 5
7 הוא ראשוני

הדוגמא הראשונה מצהירה על יחס בינארי בין 3 ו 5, קרי היחס "להיות קטן מ־". הדוגמא השניה מצהירה על תכונה של המספר 7. גם תכונה זאת מגדירה יחס, אך יחס זה הוא אונארי.

דוגמא נוספת היא קבוצת כל הנקודות במישור, שנקראת גם "המישור". בעולם זה ניתן להתבונן ביחס "P_1, P_2 ו P_3 נמצאות על ישר", או "P_1, P_2 ו P_3 מגדירות משולש עם זוית ישרה ב P_2". יחס (4־מקומי) נוסף הוא היחס הבא בין ארבע נקודות: "P_1, P_2, P_3 ו P_4 הן קודקודים של ריבוע".

1.4 הגדרה. תהי A קבוצה, ויהי n מספר טבעי.

1. יחס n־מקומי על A הוא קבוצה $R \subseteq A^n$.

2. יחס 1־מקומי ייקרא גם יחס אונארי.

3. יחס 2־מקומי ייקרא גם יחס בינארי.
4. יחס 3־מקומי ייקרא גם יחס טרנארי.

2.4 דוגמא.

(א) $\{(n,m) : m$ קטן מ $n\}$ **יחס בינארי על** $\mathbb{N}$.

(ב) $\{(m,n,m+n) : m,n \in \mathbb{N}\}$ **יחס טרנארי על** $\mathbb{N}$.

(ג) $\{n : n$ ראשוני$\}$ **יחס אונארי על** $\mathbb{N}$.

(ד) $\{n : n$ מספר טבעי$\}$ **יחס אונארי (טריויאלי) על** $\mathbb{N}$.

(ה) $\{(p,q,r,s) : p,q,r,s$ מהוות קודקודים של ריבוע במישור$\}$ **יחס** 4־מקומי על המישור.

לכן, יהיו בשפה סמלים עבור יחסים n־מקומיים. כמו כן, נצטרך לקחת בחשבון פונקציות הפועלות על אברי העולם. כאשר העולם הוא $\mathbb{N}$, דוגמא טיפוסית לפונקציה היא "$+$". זוהי פונקציה בינארית, כמו פעולת הכפל בחבורה.

3.4 הגדרה. תהי A קבוצה, ויהי n מספר טבעי. נאמר ש F היא פונקציה n־מקומית על A, אם $F \subseteq A^{n+1}$ ומקיימת

לכל $a_1,\ldots,a_n$ ב A, יש b יחיד ב A כך ש $(a_1,\ldots a_n,b) \in F$.

במקרה זה, נכתוב $Fa_1\ldots a_n = b$ או $F(a_1,\ldots,a_n) = b$.

למשל, הקבוצה $\{(n,2n) : n \in \mathbb{N}\} = \{(0,0),(1,2),(2,4),\ldots\}$ היא יחס בינארי, וכן פונקציה אונארית (לפי ההגדרה, כל פונקציה n־מקומית היא יחס $n+1$־מקומי, אך לא להיפך).

בחלק מהעולמות יש איברים מיוחדים. בתורת המספרים, למשל, "0" הוא איבר מיוחד. עבור איברים כאלו יש סמלים מיוחדים בשפה, הנקראים *סמלי קבועים*, או *קבועים*.

לעיתים יש ברצוננו לנסח טענה על מספר איברים בעולם, אך איננו רוצים לדבר על אובייקטים ספציפיים. למטרה זו אנו משתמשים *במשתנים*. שימוש טיפוסי במשתנים הוא כשאנו אומרים

"יהי n מספר טבעי. אזי n זוגי או איזוגי ..."

כאן, המשתנה הוא "n". כדי שמספר המשתנים לא יהיה מוגבל, נכלול אוסף אינסופי של משתנים בשפה.

לבסוף, אנו רוצים לבנות טענות, האומרות שאיברים עם תכונה מסויימת קיימים בעולם שבו אנו עוסקים, או שלכל האיברים בעולם יש תכונה מסויימת. טענה מהסוג הראשון נקראת כימות קיומי, וטענה מהסוג השני נקראת כימות אוניברסלי. דוגמא המשתמשת בשני סוגי הכימות היא

"לכל מספר טבעי n, קיים/יש מספר טבעי p כך ש p הוא ראשוני ו p גדול מ n"

כאן, "לכל" הוא כמת אוניברסלי, ו "קיים" (או "יש") הוא כמת קיומי.
כעת אנו מוכנים להגדרת הסמלים בהם משתמשים בשפה מסדר ראשון.

4.4 הגדרה. להלן הסמלים (האלף־בית) בהם משתמשים בשפה מסדר ראשון:

1. קשרים לוגיים: $\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow,\ |$
2. סוגריים: $(,)$
3. משתנים: $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3, \ldots$
(בדרך כלל, נסמן משתנה באותיות כגון $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$. ($\mathrm{x}$ ו y יכולים לסמן את אותו המשתנה v_n)
4. סמל השויון: $=$
5. כמתים: $\forall,\ \exists$
($\forall$ מסמל את "לכל" ו $\exists$ מסמל את "קיים/יש")
6. סמלי קבועים: קבוצה $\mathcal{C}$ של סמלי קבועים. (בדרך כלל נסמן איבר של $\mathcal{C}$ ב c).
7. סמלי פונקציות: קבוצה $\mathcal{F}$ של סמלי פונקציות. (בדרך כלל, נסמן איבר של $\mathcal{F}$ ב F. לכל סמל פונקציה אנו מיחסים מספר טבעי חיובי, "מספר המקומות". למשל, אנו אומרים: "F הוא סמל פונקציה 7־מקומית").
8. סמלי יחסים: קבוצה $\mathcal{R}$ של סמלי יחסים. (בדרך כלל נסמן איבר של $\mathcal{R}$ ב R). גם כאן מיוחס מספר מקומות לכל סמל יחס.

5.4 הערה. מאוחר יותר נתייחס לשפה מצומצמת, שבה מופיעים רק הקשרים $\neg$ ו $\wedge$, והכמת $\forall$.

6.4 הערה. הסמלים ב 4.4 (1), (2), (3), (4) ו (5) נקראים סמלים לוגיים. הם מהווים חלק מהסמלים של כל שפה מסדר ראשון. הסמלים ב 4.4 (5), (6), ו (7) נקראים סמלים לא־לוגיים, ומשתנים בהתאם לתחום המתמטי שאותו אנו חוקרים.

7.4 דוגמא. ניתן מספר דוגמאות של שפות מסדר ראשון. ליתר דיוק, ניתן רק את הסמלים שאינם סמלים לוגיים באלף־בית של השפה, כאשר בעזרת האלף־בית מוגדרת השפה בתהליך האינדוקטיבי שתואר לעיל. לכל שפה, ניתן גם דוגמא לנוסחה בשפה, ו"נתרגם" את הנוסחה לשפה המתמטית הרגילה. דיון פורמאלי יותר לגבי "משמעות" של נוסחאות ינתן מאוחר יותר.

1. השפה של תורת המספרים:

סמלי קבועים: רק "0"

סמלי פונקציות: S (סמל עבור פונקצית העוקב), "$+$" "$\cdot$", "$\uparrow$" (עבור חזקה)

סמלי יחסים: "$<$"

נהוג לכתוב $a < b$ במקום $<ab$, ו $a + b$ במקום $+ab$. רשמית, הסמל $\uparrow$ משמש עבור חזקה. לכן, "x בחזקת y" יכתב $\uparrow(x,y)$. אולם למעשה, כמעט תמיד נכתוב x^y, בהתאם לסימון המקובל.

פירוש הנוסחה $\exists x\, S(S(0)) \cdot x = y$ הוא: "y הוא מספר זוגי".

פירוש הנוסחה $\exists y (S(S(0))^y = x$ הוא: "x הוא חזקה של 2".

2. השפה העניה של תורת המספרים:

סמלי קבועים: אין

סמלי פונקציות: "+", "·"

סמלי יחסים: אין

פירוש הנוסחה $\exists x\, x + x = y$ הוא: "y הוא מספר זוגי".

3. השפה של תורת החבורות:

סמלי קבועים: "0"

סמלי פונקציות: סמל פונקציה בינארית "+"

סמלי יחסים: אין.

פירוש הנוסחה $(\forall x\, (x + x) + x = 0)$ הוא: כל איבר של החבורה (שעליה מדברת הנוסחה) הוא מסדר 3.

(לפעמים אנו כותבים $\cdot$, או $*$ עבור הפעולה הבינארית, ו 1, או e בהתאמה, עבור סמל הקבוע).

4. השפה של תורת הקבוצות:

סמלי יחסים: "$\in$"

סמלי פונקציות: אין

פירוש הנוסחה $\exists y\, y \in x$ הוא: "x איננו הקבוצה הריקה (כלומר יש בו איזשהו איבר)".

5. השפה של המספרים הממשיים:

סמלי יחסים: "$<$" , "$\leq$"

סמלי פונקציות: "+", "−", "·", "/", "↑", "abs", "sin", "cos", "tan", "exp", וכולי.

סמלי קבועים: "0", "1"

abs הוא סמל לפונקצית הערך המוחלט. בדרך כלל כותבים $|x|$ במקום $abs(x)$. exp סמל לפונקצית האקספוננט, $exp(x) = e^x$.

את הנוסחה

$$\forall h \left[0 < h \to \exists t \big(0 < t \land \forall z : (|z| < t \to |\,(\sin z/z) - 1| < h)\big)\right]$$

כותבים בדרך כלל כך:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

6. השפה של אנליזה ממשית (מסדר ראשון): כמו השפה הקודמת, אך צריך בנוסף מספר סמלי פונקציות "גנריים" (סמלים שיכולים לייצג כל פונקציה) $\mathtt{f}, \mathtt{g}, \ldots$.
למשל, הנוסחה

$$\forall \mathtt{a} \forall \mathtt{h}\Big[\mathtt{0} < \mathtt{h} \rightarrow \exists \mathtt{k}\left(\mathtt{0} < \mathtt{k} \wedge \forall \mathtt{x}(|\mathtt{x}-\mathtt{a}| < \mathtt{k} \rightarrow |\mathtt{f}(\mathtt{x})-\mathtt{f}(\mathtt{a})| < \mathtt{h}\right)\Big]$$

אומרת ש $\mathtt{f}$ סמל של פונקציה רציפה בכל נקודה. (בדרך כלל מפותחת האנליזה הממשית בעזרת שפה חזקה יותר, אולם ניתן לבטא מינוחים רבים בשפה מסדר ראשון שהצגנו כאן).

כמו בפרק הקודם, נגדיר את השפה כמבנה אינדוקטיבי. ראשית, נגדיר את הבלוקים, שיוגדרו אף הם בתהליך אינדוקטיבי.

8.4 הגדרה. נאמר ש τ עצם אם מתקיים אחד מהבאים:

1. τ סמל קבוע
2. τ משתנה
3. יש סמל פונקציה n־מקומית $\mathtt{F}$ ועצמים $\tau_1, \ldots, \tau_n$ כך ש $\tau = \mathtt{F}\tau_1 \ldots \tau_n$.

קבוצת העצמים היא המבנה האינדוקטיבי הבא:
הבלוקים הם סמלי הקבועים והמשתנים;
הפעולות הם הפונקציות שמתאימות ל $\tau_1, \ldots, \tau_n$ את $\mathtt{F}\tau_1 \ldots \tau_n$, כלומר לכל סמל פונקציה n־מקומית $\mathtt{F}$ יש פעולה $K_{\mathtt{F}}$, המוגדרת על ידי: $K_{\mathtt{F}}(\tau_1, \ldots, \tau_n) = \mathtt{F}\tau_1 \cdots \tau_n$.

9.4 הגדרה. φ היא נוסחה אטומית אם יש סמל יחס n־מקומי $\mathtt{R}$, ועצמים $\tau_1, \ldots, \tau_n$ כך ש φ היא $\mathtt{R}\tau_1 \ldots \tau_n$, או אם יש עצמים τ_1, τ_2 כך ש φ היא $\tau_1 = \tau_2$.

סמלי קבועים מייצגים אובייקטים ספציפיים במודל שבו עוסקים. פונקציות מעתיקות אובייקטים לאובייקטים אם הן אונאריות; זוגות של אובייקטים לאובייקטים אם הן בינאריות, וכולי.
לכן, עצם הוא למעשה שם של אובייקט. למשל, במודל $\mathbb{N}$ של המספרים הטבעיים, העצם $\mathtt{0}$ מייצג את המספר הטבעי 0. $\mathtt{S}(\mathtt{0})$ מייצג את האובייקט שמתקבל מ 0 על ידי הפעלת פונקציית העוקב, כלומר המספר הטבעי 1.
לפעמים כותבים את העצם $\mathtt{F}\tau_1 \cdots \tau_n$ בצורה $\mathtt{F}(\tau_1, \ldots, \tau_n)$. למשל, אם $\mathtt{f}$ הוא סמל פונקציה בינארית, ו $\mathtt{x}$ ו $\mathtt{y}$ משתנים, אנו עשויים לכתבוב $\mathtt{f}(\mathtt{x}, \mathtt{f}(\mathtt{y}, \mathtt{y}))$ במקום $\mathtt{fxfyy}$. באופן דומה, אנו עשויים לכתוב נוסחה אטומית $\mathtt{R}\tau_1 \cdots \tau_n$ כך: $\mathtt{R}(\tau_1, \ldots, \tau_n)$.
בשפה של תורת המספרים, $\mathtt{S}(\mathtt{x})$ הוא העצם שמייצג את העוקב של המספר ש $\mathtt{x}$ מייצג ($\mathtt{x}$ הוא משתנה, לכן אין הוא מתאים למספר קבוע כלשהו. אולם אם ניתן את הערך 4 ל $\mathtt{x}$, אז $\mathtt{S}(\mathtt{x})$ ייצג את הערך 5).
נוסחאות אטומיות מייצגות את הטענות הבסיסיות ביותר שניתן לומר לגבי עצמים. בשפה של תורת המספרים, למשל, $\mathtt{0} = \mathtt{0}$, $\mathtt{S}(\mathtt{0}) < \mathtt{0}$, ו $\mathtt{y} + \mathtt{0} = \mathtt{x}$ הן נוסחאות אטומיות.
נבנה נוסאות כלליות בעזרת הנוסחאות האטומיות.

10.4 הגדרה. φ היא נוסחה אם אחד מהתנאים הבאים מתקיים:

1. φ היא נוסחה אטומית
2. יש נוסחאות ψ ו χ כך ש:
   (א) φ היא $(\neg\psi)$, או
   (ב) φ היא $(\psi \wedge \chi)$, או
   (ג) φ היא $(\psi \vee \chi)$, או
   (ד) φ היא $(\psi \to \chi)$, או
   (ה) φ היא $(\psi \leftrightarrow \chi)$, או
   (ו) φ היא $(\psi|\chi)$.
3. יש נוסחה ψ ומשתנה x כך ש φ היא $(\forall \mathrm{x}\psi)$ או $(\exists \mathrm{x}\psi)$.

למשל, שוב בשפה של תורת המספרים, נביא מספר נוסחאות:

$$0 = 0$$
$$(0 = 0 \vee (\mathrm{y} + 0) = \mathrm{x})$$
$$(\exists \mathrm{x}\ \mathrm{y} = (\mathrm{x} + \mathrm{x}))$$

(נהוג להשמיט את הסוגריים כאשר מקומם ברור מההקשר).
השפה מסדר ראשון, $\mathcal{L}$, היא אוסף כל הנוסחאות. שוב, עלינו להוכיח משפטים בסיסיים על שפה זאת. המטרה כעת היא להראות קריאות יחידה של $\mathcal{L}$. היות שההוכחות דומות להוכחות המובאות לאחר הגדרה 24.1, אנו משמיטים אותן.

11.4 משפטון. אף עצם אינו רישא של עצם.

הוכחה. תרגיל. □

12.4 משפטון. לכל עצם τ, מתקיים בדיוק אחד מהמקרים הבאים:

1. τ קבוע
2. τ משתנה
3. יש סמל פונקציה יחיד F ועצמים הנקבעים באופן יחיד $\tau_1, \ldots, \tau_n$ כך ש $\tau = \mathrm{F}\tau_1 \ldots \tau_n$

13.4 משפטון. תהי φ נוסחה אטומית. אזי מתקיים בדיוק אחד מהמקרים הבאים:
(1) יש סמל יחס יחיד R ועצמים הנקבעים באופן יחיד $\tau_1, \ldots, \tau_n$ כך ש R n-מקומי ו φ היא $\mathrm{R}\tau_1 \ldots \tau_n$.
(2) יש עצמים הנקבעים באופן יחיד τ_1, τ_2 כך ש φ היא $\tau_1 = \tau_2$.

1.4 משפט (קריאות יחידה של $\mathcal{L}$)**.** לכל נוסחה φ מתקיים בדיוק אחד מהמקרים הבאים:

1. φ אטומית

2. יש נוסחה יחידה ψ כך ש φ היא $(\neg\psi)$

3. יש נוסחאות הנקבעות באופן יחיד ψ, χ וקשר יחיד $@ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, |\}$ כך ש φ היא $(\psi @ \chi)$

4. יש נוסחה יחידה ψ כך ש φ היא $\forall \mathrm{x}\psi$

5. יש נוסחה יחידה ψ כך ש φ היא $\exists \mathrm{x}\psi$

כעת, משנתנו ההגדרות של "עצם" ושל "נוסחה", הקורא מתבקש לחזור על הדוגמאות ב 7.4.

תרגילים

דוגמאות לשפות מסדר ראשון

1.4 תרגיל. מצא נוסחה φ (עם משתנה חופשי x) בשפה העניה של תורת המספרים (7.4) כך ש $\mathbb{N} \models \varphi(\mathrm{x}/n)$ אם ורק אם n הוא חזקה של 2 (רמז: מהי התכונה שיש לכל מחלקי n ?).

2.4 תרגיל. תן דוגמא לשפה מסדר ראשון, הדרושה לתיאור מודל שהוא:

(א) חבורה

(ב) חוג

(ג) שדה

(ד) המספרים הטבעיים

(ה) גרף

(ו) עץ

3.4 תרגיל. עבור כל אחת מקבוצות הנוסחאות להלן, תאר מודל שמקיים אותן. נסה לתאר את כל המודלים הסופיים המקיימים את הנוסחאות.

(א)

1. $\mathrm{R}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) \wedge \mathrm{R}(\mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3) \rightarrow \mathrm{R}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_3)$
2. $\mathrm{R}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) \wedge \mathrm{R}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_3) \wedge \mathrm{R}(\mathrm{x}_2, \mathrm{x}_4) \wedge R(\mathrm{x}_3, \mathrm{x}_4) \rightarrow \mathrm{R}(\mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3) \vee \mathrm{R}(\mathrm{x}_3, \mathrm{x}_2) \vee (\mathrm{x}_2 = \mathrm{x}_3)$

(ב)

1. $\mathrm{R}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) \wedge \mathrm{R}(\mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3) \rightarrow \mathrm{R}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_3)$
2. $\mathrm{R}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_3) \wedge \mathrm{R}(\mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3) \rightarrow \mathrm{R}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) \vee \mathrm{R}(\mathrm{x}_2, \mathrm{x}_1) \vee (\mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_2)$
3. $\mathrm{R}(\mathrm{c}_1, \mathrm{x}_1)$

4.4 תרגיל. עבור כל אחד מהמקרים הבאים, מצא שפה מתאימה מסדר ראשון, ונוסחה כך שיש מודלים המקיימים את הנוסחה, ולכל מודל המקיים את הנוסחה יש את התכונה:

(א) המודל הוא קבוצה סופית עם בדיוק n איברים (n נתון).

(ב) המודל הוא סדר לינארי צפוף (למשל, המספרים הרציונליים).

(ג) המודל הוא שדה.

(ד) המודל הוא שדה ממאפיין 3.

פרק 5

מודלים ונכונות

כדי להעניק משמעות (סמאנטיקה) לשפה $\mathcal{L}$, עלינו לקבוע קבוצה שתיקרא "העולם". לאחר מכן, עלינו לתת פירוש לסמלי הקבועים, לסמלי הפונקציות, ולסמלי היחסים. לשאר הסמלים ינתן הפירוש התקני (המקובל, הטבעי).

1.5 הגדרה. תהי $\mathcal{L}$ שפה מסדר ראשון. *מודל* (או *מבנה*) $\mathcal{M}$ עבור $\mathcal{L}$ מכיל את הבאים:

1. קבוצה לא ריקה M, שנקראת עולם (לעיתים נכתבת כ $|\mathcal{M}|$. בדרך כלל אנו משתמשים באותיות קאליגרפיות כגון $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{X}$, וכולי עבור מודלים, ובאותיות הרגילות המתאימות A, B, M, N, X, וכולי עבור העולם של המודל).
2. לכל סמל יחס $\mathrm{R} \in \mathcal{R}$, יחס $\mathrm{R}^{\mathcal{M}}$ על M כך שאם R k־מקומי, אז $\mathrm{R}^{\mathcal{M}} \subseteq M^k$. (בפרט, סמל יחס בינארי יפורש כיחס בינארי, וכולי).
3. לכל $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$, פונקציה $\mathrm{F}^{\mathcal{M}}$ עם טווח ב M כך שאם F k־מקומית, אז $\mathrm{F}^{\mathcal{M}}$ היא פונקציה עם תחום M^k.
4. לכל $\mathrm{c} \in \mathcal{C}$ איבר $\mathrm{c}^{\mathcal{M}} \in M$.

עבור שפה נתונה $\mathcal{L}$, עם סמלי יחסים $\mathrm{R}_1, \ldots$, סמלי פונקציות $\mathrm{F}_1, \ldots$, וסמלי קבועים $\mathrm{c}_1, \ldots$, נכתוב את המודל $\mathcal{M}$ בצורת הסדרה

$$\mathcal{M} = \langle M, \mathrm{R}_1^{\mathcal{M}}, \ldots, \mathrm{F}_1^{\mathcal{M}}, \ldots, \mathrm{c}_1^{\mathcal{M}}, \ldots \rangle$$

לדוגמא, חבורה עם קבוצה X, פעולה $*$ ואיבר נייטראלי ϕ תיכתב כ $\langle X, *, \phi \rangle$.

2.5 הערה. הרעיון של הגדרה 1.5 הוא:

1. נותן את העולם
2. נותן, לכל $\mathrm{R} \in \mathcal{R}$, פירוש: היחס $\mathrm{R}^{\mathcal{M}}$.
3. נותן, לכל $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$, פירוש: הפונקציה $\mathrm{F}^{\mathcal{M}}$.

4. נותן, לכל $c \in \mathcal{C}$, פירוש: הקבוע $c^{\mathcal{M}}$.

הקשרים הלוגיים יפורשו כבפרק 2, ו $\forall x \ldots$ תתפרש כ "לכל איבר ב M...". $\exists x \ldots$ תתפרש כ "יש איבר ב M...".

3.5 דוגמא.

(א) $\langle \mathbb{N}, +^{\mathbb{N}}, \cdot^{\mathbb{N}}, \rangle$ מודל עבור השפה המצומצמת של תורת המספרים, שניתנה ב 7.4, כאשר

1. $+^{\mathbb{N}} = \{\langle n,m,l \rangle : \langle n,m,l \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ \ n+m=l\}$
2. $\cdot^{\mathbb{N}} = \{\langle n,m,l \rangle : \langle n,m,l \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ \ n \cdot m=l\}$.

(ב) $\mathcal{Z} = \langle \mathbb{Z}, \cdot^{\mathcal{Z}}, 1^{\mathcal{Z}} \rangle$ מודל עבור השפה של תורת החבורות, כאשר

1. $\cdot^{\mathcal{Z}} = \{\langle x,y,z \rangle \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x+y=z\}$.
2. $1^{\mathcal{Z}}$ הוא המספר 0.

יהי $\mathcal{M}$ מודל עבור השפה $\mathcal{L}$. תהי φ נוסחה בשפה $\mathcal{L}$. ברצוננו להגדיר את המינוח "φ נכונה ב $\mathcal{M}$". למשל, תהי φ הנוסחה $\exists x R(x)$. אם ברצוננו שנוסחה זו תהיה "נכונה" ב $\mathcal{M}$, כוונתנו היא שיש איבר $a \in R^{\mathcal{M}}$.

ברצוננו להגדיר את האמת באינדוקציה, לכן עלינו לקבוע תחילה מהו ערך האמת של $R(x)$. אולם x הוא משתנה, ואין לו קשר ל $\mathcal{M}$. כדי להתגבר על בעיה זאת, נכליל את ההגדרה של "עצמים" ו"נוסחאות" ל"$\mathcal{M}$־עצמים" ו"$\mathcal{M}$־נוסחאות". ההגדרה היא אינדוקטיבית.

4.5 הגדרה. יהיו $\mathcal{L}$ שפה, $\mathcal{M}$ מודל עבור $\mathcal{L}$. τ הוא $\mathcal{M}$־עצם אם אחד מהבאים מתקיים:

(א) τ הוא קבוע בשפה $\mathcal{L}$.

(ב) τ הוא משתנה.

(ג) $\tau \in M$.

(ד) יש סמל פונקציה n־מקומית F ב $\mathcal{L}$ ו $\mathcal{M}$־עצמים $\tau_1, \ldots, \tau_n$ כך ש $\tau = F\tau_1 \ldots \tau_n$.

לכן, $\mathcal{M}$־עצמים מוגדרים כמו עצמים, אך גם אברים של העולם $\mathcal{M}$ משמשים כבלוקים.

למניעת אי־הבנות, תמיד הנח שאף איבר של השפה שלנו (או של האלף־בית של השפה) אינו איבר של המודל שבו אנו עוסקים.

$\mathcal{M}$־נוסחאות מוגדרות בדומה לנוסחאות (רגילות), פרט לכך שגם ביטויים מהצורה $\tau_1 = \tau_2$ (וכן $R\tau_1 \cdots \tau_n$) יחשבו $\mathcal{M}$־נוסחאות (אטומיות) כאשר $\tau_1, \ldots, \tau_n$ הם $\mathcal{M}$־עצמים (ו R סמל יחס n־מקומי).

נאמר ש $\mathcal{M}$־עצם הוא סגור, אם לא מופיעים בו משתנים.

לכל $\mathcal{M}$־עצם סגור τ נוכל להתאים ערך $\tau^{\mathcal{M}}$, שיהיה איבר של M. $\tau^{\mathcal{M}}$ נקרא "הפירוש של τ ב $\mathcal{M}$".

5.5 הגדרה.

1. אם τ הוא סמל קבוע c, $\tau^{\mathcal{M}}$ הוא האיבר $\mathrm{c}^{\mathcal{M}}$.
2. אם τ איבר של M, $\tau := \tau^{\mathcal{M}}$.
3. אם τ הוא ה $\mathcal{M}$־עצם $\mathrm{F}(\tau_1,\ldots,\tau_n)$, $\tau^{\mathcal{M}} := \mathrm{F}^{\mathcal{M}}(\tau_1^{\mathcal{M}},\ldots,\tau_n^{\mathcal{M}})$, כלומר אנו מחשבים את $\tau^{\mathcal{M}}$ על ידי חישוב כל $\tau_i^{\mathcal{M}}$ והפעלת הפונקציה $\mathrm{F}^{\mathcal{M}}$.

נשתמש בשפה של תורת המספרים (ראה 7.4)

6.5 דוגמא. יהי $\mathbb{N}$ המודל של המספרים הטבעיים. להלן דוגמאות של $\mathbb{N}$־עצמים:

$$\mathrm{x}$$
$$\mathrm{S}(\mathrm{x}+0)$$
$$\mathrm{S}(3)+(2\cdot 2).$$

ה $\mathcal{M}$־עצם השלישי הוא $\mathcal{M}$־עצם סגור. הפירוש שלו ב $\mathbb{N}$ הוא 8.
שים לב להבדל שבין המספר הטבעי 0 (שהוא $\mathbb{N}$־עצם) לבין סמל הקבוע $\mathrm{0}$ (שהוא $\mathbb{N}$־עצם, ואפילו עצם). למרות ההבדל, לשני $\mathbb{N}$־עצמים אלו יש אותו פירוש במודל של המספרים הטבעיים: $0^{\mathbb{N}} = 0 = \mathrm{0}^{\mathbb{N}}$.

נציג עתה את מושג ה החלפה. בהינתן $\mathcal{M}$־עצם μ שבו מופיע המשתנה x (למשל, $\mathrm{S}(\mathrm{x})$), ו $\mathcal{M}$־עצם נוסף τ (למשל, $\mathrm{0}+\mathrm{0}$), נוכל להגדיר את ה $\mathcal{M}$־עצם "μ, עם x מוחלף ב τ" (בדוגמא שלנו, $\mathrm{S}(\mathrm{0}+\mathrm{0})$).
אם נפרש את $\mathrm{S}(\mathrm{x})$ כתהליך כללי להגיע לאובייקט מסויים $\mathrm{S}(\mathrm{x})$ מאובייקט נתון x במודל שלנו, אזי $\mathrm{S}(\mathrm{0}+\mathrm{0})$ הוא האובייקט שנקבל אם נתחיל ב $\mathrm{0}+\mathrm{0}$ במקום x.

7.5 הגדרה. יהי $\mathcal{M}$ מודל.

(א) יהיו μ $\mathcal{M}$־עצם, x משתנה, ו τ $\mathcal{M}$־עצם. נגדיר את $\mu(\mathrm{x}/\tau)$ באינדוקציה על μ.

1. אם μ הוא סמל קבוע c, או איבר של $\mathcal{M}$, $\mu(\mathrm{x}/\tau) = \mu$ (אנו מחליפים רק משתנים).
2. אם μ הוא משתנה y,

$$\mu(\mathrm{x}/\tau) = \begin{cases} \mu & \mathrm{x}\neq\mathrm{y} \\ \tau & \mathrm{x}=\mathrm{y} \end{cases}$$

3. אם $\mu = \mathrm{F}\mu_1\ldots\mu_n$,

$$\mu(\mathrm{x}/\tau) = \mathrm{F}\mu_1(\mathrm{x}/\tau)\ldots\mu_n(\mathrm{x}/\tau)$$

במלים אחרות, כל המופעים של x מוחלפים ב $\mathcal{M}$־עצם τ.

(ב) יהיו φ $\mathcal{M}$־נוסחה, x משתנה, ו τ $\mathcal{M}$־עצם. נגדיר את $\varphi(\mathrm{x}/\tau)$ באינדוקציה על φ.

1. אם $\varphi = \mathrm{R}\mu_1 \dots \mu_n$,

$$\varphi(\mathrm{x}/\tau) = \mathrm{R}\mu_1(\mathrm{x}/\tau)\dots\mu_n(\mathrm{x}/\tau)$$

2. אם $\varphi = (\neg\psi)$, $\varphi(\mathrm{x}/\tau) = (\neg\psi(\mathrm{x}/\tau))$.
3. אם $\varphi = (\psi \wedge \theta)$, $\varphi(\mathrm{x}/\tau) = (\psi(\mathrm{x}/\tau) \wedge \theta(\mathrm{x}/\tau))$. ובדומה עבור שאר הקשרים.
4. אם $\varphi = \forall \mathrm{y}\psi$ או $\exists \mathrm{y}\psi$, כאשר y משתנה השונה מ x, $\varphi(\mathrm{x}/\tau) = \forall \mathrm{y}\psi(\mathrm{x}/\tau)$ (או $\exists \mathrm{y}\psi(\mathrm{x}/\tau)$).
5. אם $\varphi = \forall \mathrm{x}\psi$ או $\exists \mathrm{x}\psi$, $\varphi(\mathrm{x}/\tau) = \varphi$ (אנו מחליפים רק כאשר המשתנים חופשיים).

8.5 דוגמא. (1) אם μ הוא $\mathrm{S}(\mathrm{x}_0) + (\mathrm{x}_0 \cdot \mathrm{x}_1)$, ו τ הוא $\mathrm{x}_0 + \mathrm{x}_2$, אז $\mu(\mathrm{x}_0/\tau)$ הוא

$$\mathrm{S}(\mathrm{x}_0 + \mathrm{x}_2) + ((\mathrm{x}_0 + \mathrm{x}_2) \cdot \mathrm{x}_1)$$

(2) אם φ היא הנוסחה $\exists \mathrm{y}(\mathrm{x} + \mathrm{y} = \mathrm{z})$, כאשר x, y, z משתנים שונים, ו τ הוא העצם $\mathrm{S}(\mathrm{x})$, אז $\varphi(\mathrm{x}/\tau)$ היא הנוסחה

$$\exists \mathrm{y}(\mathrm{S}(\mathrm{x}) + \mathrm{y} = \mathrm{z})$$

ו $\varphi(\mathrm{y}/\tau)$ היא הנוסחה φ עצמה.

9.5 משפטון. אם τ $\mathcal{M}$־עצם, אזי יש משתנים $\mathrm{y}_1, \dots, \mathrm{y}_n$ ואיברים $m_1, \dots, m_n$ של M, ויש עצם τ' כך ש $\tau = \tau'(\mathrm{y}_1/m_1)\dots(\mathrm{y}_n/m_n)$.
עובדה מקבילה נכונה עבור $\mathcal{M}$־נוסחאות.

הוכחה. באינדוקציה. $\square$

לכל עצם τ בשפה $\mathcal{L}$, $\mathrm{Var}(\tau)$ היא קבוצת המשתנים המופיעים ב τ:
$\mathrm{Var}(\mathrm{c}) = \emptyset$ לכל קבוע c ב $\mathcal{L}$
$\mathrm{Var}(\mathrm{x}) = \{\mathrm{x}\}$ לכל משתנה x ב $\mathcal{L}$
$\mathrm{Var}(\mathrm{F}\tau_1 \dots \tau_n) = \mathrm{Var}(\tau_1) \cup \dots \cup \mathrm{Var}(\tau_n)$, לכל סמל פונקציה F ב $\mathcal{L}$, כאשר $\tau_1, \dots, \tau_n$ עצמים.

10.5 הגדרה. לכל נוסחה φ, נגדיר את הקבוצות $\mathrm{Var}(\varphi)$ (קבוצת המשתנים המופיעים ב φ), $\mathrm{Bound}(\varphi)$ (קבוצת המשתנים הקשורים המופיעים ב φ) ו $\mathrm{Free}(\varphi)$ (קבוצת המשתנים החופשיים המופיעים ב φ).

(א) אם φ אטומית, כלומר מהצורה $\tau_1 = \tau_2$ או מהצורה $\mathrm{R}\tau_1 \dots \tau_n$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Bound}(\varphi) &= \emptyset \\ \mathrm{Var}(\varphi) &= \mathrm{Free}(\varphi) = \mathrm{Var}(\tau_1) \cup \mathrm{Var}(\tau_2) \end{aligned}$$

במקרה הראשון, ו $\mathrm{Var}(\varphi) = \mathrm{Free}(\varphi) = \mathrm{Var}(\tau_1) \cup \dots \cup \mathrm{Var}(\tau_n)$ במקרה השני.

(ב) אם φ **היא** $(\neg\psi)$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\varphi) &= \mathrm{Var}(\psi)\\ \mathrm{Bound}(\varphi) &= \mathrm{Bound}(\psi)\\ \mathrm{Free}(\varphi) &= \mathrm{Free}(\psi)\end{aligned}$$

(ג) אם φ **היא** $(\varphi_1 @ \varphi_2)$ **כאשר** $@ \in \{\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow,|\}$**, אז**

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\varphi) &= \mathrm{Var}(\varphi_1)\cup\mathrm{Var}(\varphi_2)\\ \mathrm{Bound}(\varphi) &= \mathrm{Bound}(\varphi_1)\cup\mathrm{Bound}(\varphi_2)\\ \mathrm{Free}(\varphi) &= \mathrm{Free}(\varphi_1)\cup\mathrm{Free}(\varphi_2)\end{aligned}$$

(ד) אם φ **היא** $\forall x\psi$ **או** $\exists x\psi$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\varphi) &= \mathrm{Var}(\psi)\cup\{x\}\\ \mathrm{Bound}(\varphi) &= \mathrm{Bound}(\psi)\cup\{x\}\\ \mathrm{Free}(\varphi) &= \mathrm{Free}(\psi)\setminus\{x\}\end{aligned}$$

(שים לב ש x **הופך, לכן, ממשתנה חופשי למשתנה קשור. נאמר במקרה זה ש** $\forall$ **"קושר" את** x**).**

11.5 דוגמא. אם φ היא הנוסחה

$$((\forall x\exists y R(x,y,z))\wedge\exists y R(x,y,y))$$

(כאשר x,y,z **הם משתנים שונים),** $\mathrm{Var}(\varphi)=\{x,y,z\}$**,** $\mathrm{Free}(\varphi)=\{x,z\}$**, ו** $\mathrm{Bound}(\varphi)=\{x,y\}$**. שים לב ש** x **חופשי וגם קשור ב** φ**. נוכל לבדוק זאת בעזרת האיור הבא:**

$$((\forall \overset{\text{קשור}}{x}\ \exists \underset{\text{קשור}}{y}\, R(\overset{\text{קשור}}{x}, \underset{\text{קשור}}{y}, \overset{\text{חופשי}}{z}))\wedge\exists \underset{\text{קשור}}{y}\, R(\overset{\text{חופשי}}{x}, y, \overset{\text{קשור}}{\underset{\text{קשור}}{y}}))$$

12.5 הגדרה. נאמר שנוסחה (או $\mathcal{M}$־נוסחה) היא נוסחה סגורה (או $\mathcal{M}$־נוסחה סגורה) אם היא לא מכילה משתנים חופשיים.

מדוע אנו מחליפים רק את המשתנים החופשיים? נתבונן בנוסחה $\exists y\, x+y=z$ (כאשר x, y, z משתנים שונים). ניתן לפרש את הנוסחה φ כך:

$(*)$ "יש מספר y כך ש $x+y=z$".

זוהי תכונה שלמספרים x ו z יש או אין, אך הבחירה של המשתנה y אינה רלוואנטית. למשל, יהי v משתנה אחר. אזי הנוסחה φ_1: $\exists v\, x + v = z$ אומרת

$(**)$ "יש מספר v כך ש $x + v = z$".

וזו למעשה אותה טענה כמו $(*)$. הן $(*)$ והן $(**)$ ניתן לבטא כך:

"יש מספר, שאם נחברו ל x נקבל את z".

לכן הנוסחה φ אינה "מדברת" על המשתנה y כלל. משום כך, כאשר אנו מבצעים החלפה, אנו נוהגים כאילו המשתנה y אינו מופיע בנוסחה כלל.

היות ש $\mu(x/\tau)$ הוא שוב עצם (נקרא לו μ_1), נוכל לבצע החלפה נוספת על עצם זה. למשל, נוכל להתיחס ל $\mu_1(y/\sigma)$, כאשר y משתנה כלשהו (לא בהכרח שונה מ x) ו σ עצם. במקום $\mu_1(y/\sigma)$ נוכל לכתוב

$$\mu(x/\tau)(y/\sigma) \quad \text{או} \quad \big(\mu(x/\tau)\big)(y/\sigma)$$

לעיתים אנו מעוניינים להחליף מספר משתנים בו זמנית:

13.5 הגדרה.

(א) יהיו μ עצם, $x_1, \ldots, x_k$ משתנים שונים, ו $\tau_1, \ldots, \tau_k$ עצמים. נגדיר את $\mu(x_1/\tau_1, \ldots, x_k/\tau_k)$ באינדוקציה על μ.

1. אם μ סמל קבוע c, $\mu(x_1/\tau_1, \ldots, x_k/\tau_k) = \mu$.
2. אם μ משתנה y,

$$\mu(x_1/\tau_1, \ldots, x_k/\tau_k) = \begin{cases} \tau_i & y = x_i \text{ לאיזשהו } i \in \{1, \ldots, k\} \\ \mu & \text{אחרת} \end{cases}$$

3. אם $\mu = F\mu_1 \ldots \mu_n$,

$$\mu(x_1/\tau_1, \ldots, x_k/\tau_k) = F\mu_1(x_1/\tau_1, \ldots, x_k/\tau_k) \ldots \mu_n(x_1/\tau_1, \ldots, x_k/\tau_k)$$

במלים אחרות, כל המופעים של x_1 מוחלפים בעצם τ_1, וכולי.

(ב) יהיו φ נוסחה, $x_1, \ldots, x_k$ משתנים שונים ו $\tau_1, \ldots, \tau_k$ עצמים. נגדיר את $\varphi(x_1/\tau_1, \ldots, x_k/\tau_k)$ באינדוקציה על φ.

1. אם φ היא הנוסחה $\mu_1 = \mu_2$, אז $\varphi(x_1/\tau_1, \ldots, x_k/\tau_k)$ היא הנוסחה

$$\mu_1(x_1/\tau_1, \ldots, x_k/\tau_k) = \mu_2(x_1/\tau_1, \ldots, x_k/\tau_k).$$

2. אם φ היא הנוסחה $\mathrm{R}\mu_1 \ldots \mu_n$, אז $\varphi(\mathrm{x}_1/\tau_1, \ldots, \mathrm{x}_k/\tau_k)$ היא הנוסחה
$$\mathrm{R}\mu_1(\mathrm{x}_1/\tau_1, \ldots, \mathrm{x}_k/\tau_k) \ldots \mu_n(\mathrm{x}_1/\tau_1, \ldots, \mathrm{x}_k/\tau_k).$$

3. אם φ היא הנוסחה $(\neg\psi)$, אז $\varphi(\mathrm{x}_1/\tau_1, \ldots, \mathrm{x}_k/\tau_k)$ היא הנוסחה
$$(\neg\psi(\mathrm{x}_1/\tau_1, \ldots, \mathrm{x}_k/\tau_k)).$$

4. אם φ היא הנוסחה $(\psi \wedge \theta)$, אז $\varphi(\mathrm{x}_1/\tau_1, \ldots, \mathrm{x}_k/\tau_k)$ היא הנוסחה
$$(\psi(\mathrm{x}_1/\tau_1, \ldots, \mathrm{x}_k/\tau_k) \wedge \theta(\mathrm{x}_1/\tau_1, \ldots, \mathrm{x}_k/\tau_k)).$$
ובדומה עבור שאר הקשרים הבינאריים.

5. אם φ היא הנוסחה $\forall\mathrm{y}\psi$, ו $\mathrm{y} \notin \{\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_k\}$, אז $\varphi(\mathrm{x}_1/\tau_1, \ldots, \mathrm{x}_k/\tau_k)$ היא הנוסחה
$$\forall\mathrm{y}\psi(\mathrm{x}_1/\tau_1, \ldots, \mathrm{x}_k/\tau_k).$$

6. אם φ היא הנוסחה $\forall\mathrm{x}_i\psi$ או $\exists\mathrm{x}_i\psi$ לאיזשהו $i \in \{1, \ldots, k\}$, אז $\varphi(\mathrm{x}_1/\tau_1, \ldots, \mathrm{x}_k/\tau_k)$ היא הנוסחה
$$\forall\mathrm{x}_i(\psi(\mathrm{x}_1/\tau_1, \ldots, \mathrm{x}_{i-1}/\tau_{i-1}, \mathrm{x}_{i+1}/\tau_{i+1}, \ldots, \mathrm{x}_k/\tau_k)$$
(כלומר אנו מחליפים את כל ה x_j־ים פרט ל x_i).

במלים אחרות, כל המופעים החופשיים של x_1 מוחלפים בעצם τ_1, וכולי.

14.5 דוגמא. יהי μ העצם $(\mathrm{x}+\mathrm{y})$ (כאשר x ו y משתנים שונים). יהי τ_1 העצם $(\mathrm{x}\cdot\mathrm{y})$, ויהי τ_2 העצם z (משתנה שונה מ x ומ y). אזי
$$\begin{aligned}
\mu(\mathrm{x}/\tau_1, \mathrm{y}/\tau_2) &= ((\mathrm{x}\cdot\mathrm{y})+\mathrm{z}) \\
\mu(\mathrm{y}/\tau_2, \mathrm{x}/\tau_1) &= ((\mathrm{x}\cdot\mathrm{y})+\mathrm{z}) \\
\mu(\mathrm{x}/\tau_1) &= ((\mathrm{x}\cdot\mathrm{y})+\mathrm{y}) \\
\mu(\mathrm{x}/\tau_1)(\mathrm{y}/\tau_2) &= ((\mathrm{x}\cdot\mathrm{y})+\mathrm{y})(\mathrm{y}/\tau_2) = ((\mathrm{x}\cdot\mathrm{z})+\mathrm{z}) \\
\mu(\mathrm{y}/\tau_2) &= (\mathrm{x}+\mathrm{z}) \\
\mu(\mathrm{y}/\tau_2)(\mathrm{x}/\tau_1) &= (\mathrm{x}+\mathrm{z})(\mathrm{x}/\tau_1) = ((\mathrm{x}\cdot\mathrm{y})+\mathrm{z})
\end{aligned}$$

15.5 דוגמא. תהי φ הנוסחה $(\exists\mathrm{u}(\mathrm{x}+\mathrm{u})=\mathrm{y})$ (כאשר x, y, u ו z משתנים שונים). אזי
$$\begin{aligned}
\varphi(\mathrm{x}/\mathrm{x}\cdot\mathrm{u}, \mathrm{y}/\mathrm{z}) &= (\exists\mathrm{u}((\mathrm{x}\cdot\mathrm{u})+\mathrm{u})=\mathrm{z}) \\
\varphi(\mathrm{x}/\mathrm{x}\cdot\mathrm{y}, \mathrm{y}/\mathrm{z}) &= (\exists\mathrm{u}((\mathrm{x}\cdot\mathrm{y})+\mathrm{u})=\mathrm{z})
\end{aligned}$$
נראה בהמשך, שההחלפה הראשונה אינה "מותרת".

16.5 הערה.

1. (א) אם μ עצם, והמשתנה x אינו מופיע בו, אזי $\mu = \mu(\mathrm{x}/\tau)$.
(ב) אם μ הוא $\mathcal{M}$־עצם, $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n$ משתנים שונים, ו $\tau_1, \ldots, \tau_n$ הם $\mathcal{M}$־עצמים סגורים, אז

$$\mu(\mathrm{x}_1/\tau_1, \ldots, \mathrm{x}_n/\tau_n) = \mu(\mathrm{x}_1/\tau_1) \cdots (\mathrm{x}_n/\tau_n).$$

2. (א) אם המשתנה x אינו חופשי בנוסחה φ (ראה 10.5), אזי $\varphi = \varphi(\mathrm{x}/\tau)$.
(ב) אם φ היא $\mathcal{M}$־נוסחה, $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n$ משתנים שונים, ו $\tau_1, \ldots, \tau_n$ הם $\mathcal{M}$־עצמים סגורים, אז

$$\varphi(\mathrm{x}_1/\tau_1, \ldots, \mathrm{x}_n/\tau_n) = \varphi(\mathrm{x}_1/\tau_1) \cdots (\mathrm{x}_n/\tau_n).$$

הוכחה. (1) א. באינדוקציה על μ.
ב. באינדוקציה על n, כאשר שלב האינדוקציה מוכח באינדוקציה על μ.
(2) דומה. $\square$

ההגדרה הבאה היא באינדוקציה על האורך של ה $\mathcal{M}$־נוסחה φ. אם נגדיר את האורך של כל איבר m בעולם M של המודל להיות 1, אז לכל $\mathcal{M}$־נוסחה מוגדר אורך. אם נתאר תהליך שבו אנו מגדירים תכונה עבור $\mathcal{M}$־נוסחאות אטומיות (שהן הנוסחאות הקצרות ביותר) ולכל $\mathcal{M}$־נוסחה φ, נגדיר את התכונה עבור φ בעזרת ההגדרה עבור נוסחאות קצרות יותר, נקבל הגדרה על כל הנוסחאות φ.
כדי להראות שמתקיים

לכל $\mathcal{M}$־נוסחה φ יש את התכונה P,

עלינו להראות שלכל ה $\mathcal{M}$־נוסחאות האטומיות יש את התכונה P, וכן שאם φ $\mathcal{M}$־נוסחה מאורך n, ולכל $\mathcal{M}$־נוסחה מאורך קטן מ n יש את התכונה P, אז גם ל φ יש את התכונה P.
בדומה ניתן להגדיר באינדוקציה על האורך של נוסחה, ולהוכיח באינדוקציה על האורך של נוסחה.

17.5 הגדרה. תהי φ $\mathcal{M}$־נוסחה סגורה. נגדיר את היחס

$\mathcal{M} \models \varphi$, "$\varphi$ נכונה ב $\mathcal{M}$" (או "$\mathcal{M}$ מקיים φ")

באינדוקציה על האורך של φ:

1. אם φ היא ה $\mathcal{M}$־נוסחה $\tau_1 = \tau_2$ (כאשר τ_1 ו τ_2 $\mathcal{M}$־עצמים סגורים), $\mathcal{M} \models \varphi$ אם ורק אם $\tau_1^{\mathcal{M}}$ ו $\tau_2^{\mathcal{M}}$ הם אותו איבר של M.
2. אם φ היא $\mathrm{R}(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, כאשר R סמל יחס, ו $\tau_1, \ldots, \tau_n$ $\mathcal{M}$־עצמים סגורים, $\mathcal{M} \models \varphi$ אם ורק אם ה־n־יה $(\tau_1^{\mathcal{M}}, \ldots, \tau_n^{\mathcal{M}})$ שייכת ל $\mathrm{R}^{\mathcal{M}}$.

3. אם φ היא $(\psi_1 \wedge \psi_2)$, $\mathcal{M} \models \varphi$ אם ורק אם $\mathcal{M} \models \psi_1$ וכן $\mathcal{M} \models \psi_2$.
4. אם φ היא $(\psi_1 \vee \psi_2)$, $\mathcal{M} \models \varphi$ אם ורק אם $\mathcal{M} \models \psi_1$ או $\mathcal{M} \models \psi_2$ (או שניהם).
5. אם φ היא $(\psi_1 | \psi_2)$, $\mathcal{M} \models \varphi$ אם ורק אם לא מתקיים "$\mathcal{M} \models \psi_1$ וגם $\mathcal{M} \models \psi_2$".
6. אם φ היא $(\psi_1 \to \psi_2)$, $\mathcal{M} \models \varphi$ אם ורק אם לא מתקיים $\mathcal{M} \models \psi_1$, או שמתקיים $\mathcal{M} \models \psi_2$, כלומר: אם $\mathcal{M} \models \psi_1$, אז $\mathcal{M} \models \psi_2$.
7. אם φ היא $(\psi_1 \leftrightarrow \psi_2)$, $\mathcal{M} \models \varphi$ אם ורק אם או ששני היחסים $\mathcal{M} \models \psi_1$ ו $\mathcal{M} \models \psi_2$ מתקיימים, או שאף אחד מהם אינו מתקיים.
8. אם φ היא $(\neg\psi)$, $\mathcal{M} \models \varphi$ אם ורק אם לא מתקיים $\mathcal{M} \models \psi$.
9. אם φ היא $(\forall \mathrm{x} \psi)$, $\mathcal{M} \models \varphi$ אם ורק אם לכל $m \in M$, $\mathcal{M} \models \psi(\mathrm{x}/m)$ (הגדרה זאת חוקית, היות שהמשתנה החופשי היחיד ב ψ, אם יש כזה, הוא x, לכן $\psi(\mathrm{x}/m)$ היא שוב $\mathcal{M}$־נוסחה סגורה).
10. אם φ היא $\exists \mathrm{x} \psi$, $\mathcal{M} \models \varphi$ אם ורק אם יש איבר $m \in M$, כך ש $\mathcal{M} \models \psi(\mathrm{x}/m)$.

18.5 הגדרה. אם המשתנים החופשיים של φ הם $\mathrm{y}_1, \dots, \mathrm{y}_n$, נקרא לנוסחה

$$\forall \mathrm{y}_1 \cdots \forall \mathrm{y}_n \, \varphi$$

הסגור האוניברסלי של φ.

19.5 הערה. מסתבר שאין חשיבות לסדר שבו נכתוב את הכמתים. למטרת ההגדרה, אנו קובעים סדר מסויים של כל המשתנים בשפה, ומגדירים את הסגור האוניברסלי על ידי כתיבת הכמתים בסדר המתאים. לכן, הסגור האוניברסלי של $\mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ הוא $\forall \mathrm{x} \forall \mathrm{y} \, \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ או $\forall \mathrm{y} \forall \mathrm{x} \, \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$, בהתאם לסדר שבו x ו y מופיעים ברשימת המשתנים. במקרה שבו x ו y הם אותו משתנה, הסגור האוניברסלי של $\mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ הוא $\forall \mathrm{x} \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$.

20.5 הגדרה.

1. אם φ אינה סגורה, ניקח את ψ להיות הסגור האוניברסלי של φ, ונאמר ש $\mathcal{M} \models \varphi$ אם ורק אם $\mathcal{M} \models \psi$.
2. אם Γ היא אוסף של ($\mathcal{M}$־)נוסחאות, נכתוב $\mathcal{M} \models \Gamma$ אם ורק אם לכל $\varphi \in \Gamma$, $\mathcal{M} \models \varphi$. נקרא זאת "$\mathcal{M}$ מודל של Γ", או "$\mathcal{M}$ חושב ש Γ נכונה".
3. נכתוב $\mathcal{M} \not\models \varphi$ אם לא מתקיים $\mathcal{M} \models \varphi$ (אם φ סגורה, אז זה שקול ל $\mathcal{M} \models \neg\varphi$). $\mathcal{M} \not\models \Gamma$ פירושו שלא מתקיים $\mathcal{M} \models \Gamma$, כלומר יש $\psi \in \Gamma$ כך ש $\mathcal{M} \not\models \psi$.

21.5 הערה.

1. אם כל המשתנים החופשיים של φ הם המשתנים (השונים) $\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_n$, אז $\mathcal{M} \models \varphi$ אם ורק אם לכל n־יה $(m_1, \dots, m_n)$ מ M, $\mathcal{M} \models \varphi(\mathrm{x}_1/m_1, \dots, \mathrm{x}_n/m_n)$.

2. אם המשתנים החופשיים של φ הם חלק מהמשתנים $\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_n$, עדיין מתקיים $\mathcal{M}\models\varphi$ אם ורק אם לכל n־יה $(m_1,\ldots,m_n)$ מ M, $\mathcal{M}\models\varphi(\mathrm{x}_1/m_1,\ldots,\mathrm{x}_n/m_n)$.
3. אם τ ו μ הם $\mathcal{M}$־עצמים עם אותו פירוש, כלומר $\tau^{\mathcal{M}}=\mu^{\mathcal{M}}$, אזי לכל נוסחה φ, $\mathcal{M}\models\varphi(\mathrm{x}/\tau)$ אם ורק אם $\mathcal{M}\models\varphi(\mathrm{x}/\mu)$.

הוכחה. (1) וכן (2) מידיים מהערה 16.5.
(3) באינדוקציה על φ. □

22.5 הגדרה. יהיו Γ קבוצה של נוסחאות סגורות, ו φ נוסחה כלשהי (לא בהכרח סגורה). נכתוב

$$\Gamma\models\varphi$$

אם

לכל מודל $\mathcal{M}$: אם $\mathcal{M}\models\Gamma$, אז $\mathcal{M}\models\varphi$.

במלים אחרות,

אין מודל $\mathcal{M}$ שמקיים $\mathcal{M}\models\Gamma$ וגם $\mathcal{M}\not\models\varphi$.

אם גם φ סגורה, אז שקול לומר "אין מודל של $\Gamma\cup\{\neg\varphi\}$".

23.5 הגדרה. $\models\varphi$ פירושו $\emptyset\models\varphi$, כלומר $\mathcal{M}\models\varphi$ לכל מודל $\mathcal{M}$ (עבור אותה שפה).
נאמר ש φ היא נכונה אם $\models\varphi$.

שים לב שאיננו מגדירים $\Gamma\models\varphi$ אם יש משתנים חופשיים באחת הנוסחאות של Γ.

24.5 הגדרה. יהיו φ, ψ נוסחאות.

1. נכתוב $\psi\models\varphi$ אם $\models\psi\to\varphi$ (שים לב: אם המשתנים החופשיים של φ ו ψ הם $\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_n$, זה אומר ש $\models\forall\mathrm{x}_1\cdots\forall\mathrm{x}_n\,(\psi\to\varphi)$).
2. נכתוב $\psi\models\!\!\!\dashv\varphi$ (ונאמר ש φ שקולה אלמנטארית ל ψ) אם $\psi\models\varphi$ וכן $\varphi\models\psi$.

25.5 הערה. אם τ $\mathcal{M}$־עצם סגור, ו $\tau^{\mathcal{M}}=m$, אזי $\mathcal{M}\models\varphi(\mathrm{x}/\tau)$ אם ורק אם $\mathcal{M}\models\varphi(\mathrm{x}/m)$. אנו משאירים את ההוכחה כתרגיל.

26.5 משפטון.

1. יהיו φ ו ψ $\mathcal{M}$־נוסחאות. אזי

אם $\mathcal{M}\models\varphi\to\psi$ וכן $\mathcal{M}\models\varphi$, אז $\mathcal{M}\models\psi$

2. אם $\Gamma \cup \{\varphi\}$ היא קבוצה של נוסחאות סגורות, ו ψ נוסחה כלשהי, אז

$\Gamma \models \varphi \to \psi$ **אם ורק אם** $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$.

הוכחה. **(1)** יהיו $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n$ (כולם שונים) המשתנים החופשיים של $\varphi \to \psi$, ויהיו $a_1, \ldots, a_n$ איברים של $\mathcal{M}$. נכתוב φ' עבור $\varphi(\mathrm{x}_1/a_1, \ldots, \mathrm{x}_n/a_n)$, ובדומה עבור ψ. המשתנים החופשיים של ψ נמצאים בין $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n$.
$\mathcal{M} \models \varphi' \to \psi'$. $\mathcal{M} \models \varphi$, לכן $\mathcal{M} \models \varphi'$ (לפי 21.5). לכן לפי 17.5, $\mathcal{M} \models \psi'$.
(2) תרגיל. □

27.5 משפטון. (1) אם $\varphi_1 \models \psi_1$ ו $\varphi_2 \models \psi_2$, אזי

$$\begin{array}{rcl}
\varphi_1 \wedge \varphi_2 & \models & \psi_1 \wedge \psi_2 \\
\varphi_1 \vee \varphi_2 & \models & \psi_1 \vee \psi_2 \\
\neg\psi_1 & \models & \neg\varphi_1 \\
\forall \mathrm{x}\, \varphi_1 & \models & \forall \mathrm{x}\, \psi_1 \\
\exists \mathrm{x}\, \varphi_1 & \models & \exists \mathrm{x}\, \psi_1
\end{array}$$

(2) אם $\varphi_1 \mathrel{=\!\mid\!\models} \psi_1$ ו $\varphi_2 \mathrel{=\!\mid\!\models} \psi_2$, אזי

$$\begin{array}{rcl}
\varphi_1 \wedge \varphi_2 & =\!\mid\!\models & \psi_1 \wedge \psi_2 \\
\varphi_1 \vee \varphi_2 & =\!\mid\!\models & \psi_1 \vee \psi_2 \\
\neg\varphi_1 & =\!\mid\!\models & \neg\psi_1 \\
\forall \mathrm{x}\, \varphi_1 & =\!\mid\!\models & \forall \mathrm{x}\, \psi_1 \\
\exists \mathrm{x}\, \varphi_1 & =\!\mid\!\models & \exists \mathrm{x}\, \psi_1 \\
\varphi_1 \to \varphi_2 & =\!\mid\!\models & \psi_1 \to \psi_2 \\
\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2 & =\!\mid\!\models & \psi_1 \leftrightarrow \psi_2 \\
\varphi_1 | \varphi_2 & =\!\mid\!\models & \psi_1 | \psi_2
\end{array}$$

נשאיר את ההוכחה כתרגיל.

נוכיח מספר משפטים באינדוקציה על האורך של הנוסחאות. כדי לקצר את ההוכחות, נצטמצם לתת שפה שמשתמשת אך ורק בקשרים $\neg$ ו $\wedge$, ובכמת אחד בלבד. כדי לעשות זאת, עלינו להראות שלכל נוסחה יש נוסחה שקולה (במובן של $=\!\mid\!\models$) בתת השפה.

28.5 הגדרה. $\mathcal{L}_{\wedge,\neg,\forall}$ היא תת השפה של השפה מסדר ראשון, שאינה משתמשת בקשרים $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$, $|$, ולא בכמת $\exists$ (כלומר, אנו משתמשים בהגדרות 4.4, 8.4, ..., אך רק הקשרים $\wedge$ ו $\neg$ מופיעים ב $4.4(1)$, ורק הכמת $\forall$ מופיע ב $4.4(4)$).

29.5 הגדרה. לכל נוסחה $\varphi \in \mathcal{L}$ נגדיר נוסחה $\tilde{\varphi}$, ה"תרגום" של φ, כדלקמן:

1. אם φ אטומית, $\tilde{\varphi} = \varphi$.
2. אם $\varphi = (\neg\psi)$, $\tilde{\varphi} = (\neg\tilde{\psi})$.
3. אם $\varphi = (\psi_1 \wedge \psi_2)$, $\tilde{\varphi} = (\tilde{\psi_1} \wedge \tilde{\psi_2})$.
4. אם $\varphi = (\psi_1 \vee \psi_2)$, $\tilde{\varphi} = (\neg((\neg\tilde{\psi_1}) \wedge (\neg\tilde{\psi_2})))$.
5. אם $\varphi = (\psi_1 \to \psi_2)$, $\tilde{\varphi} = (\neg(\tilde{\psi_1} \wedge (\neg\tilde{\psi_2})))$.
6. אם $\varphi = (\psi_1 \leftrightarrow \psi_2)$, $\tilde{\varphi} = \left[\neg\left((\neg\tilde{\psi_1}) \wedge \tilde{\psi_2}\right)\right] \wedge \left[\tilde{\psi_1} \wedge \left(\neg\tilde{\psi_2}\right)\right]$.
7. אם $\varphi = (\psi_1|\psi_2)$, $\tilde{\varphi} = \neg(\tilde{\psi_1} \wedge \tilde{\psi_2})$.
8. אם $\varphi = \forall x\psi$, $\tilde{\varphi} = \forall x\tilde{\psi}$.
9. אם $\varphi = \exists x\psi$, $\tilde{\varphi} = \neg(\forall x(\neg\tilde{\psi}))$.

30.5 משפטון.

1. לכל נוסחה $\varphi \in \mathcal{L}$, הנוסחה $\tilde{\varphi}$ שייכת ל $\mathcal{L}_{\neg,\wedge,\forall}$.
2. לכל נוסחה $\varphi \in \mathcal{L}$, $\varphi \mathrel{=\!\mid\!\models} \tilde{\varphi}$.

הוכחה. תרגיל. $\square$

31.5 סימון. מעתה ואילך, נעבוד בשפה $\mathcal{L}_{\neg,\wedge,\forall}$. בכל פעם שנכתוב נוסחה $\varphi \in \mathcal{L}$ שאינה שייכת לתת השפה $\mathcal{L}_{\neg,\wedge,\forall}$, אנו משתמשים ב φ כקיצור של $\tilde{\varphi}$.

למשל, הנוסחה $(x = y \to y = x)$ היא קיצור של

$$(\neg(x = y \wedge (\neg y = x)))$$

והנוסחה $\exists x \; x = y$ היא קיצור של

$$(\neg(\forall x(\neg\, x = y)))$$

32.5 הגדרה. נוסחה φ נקראת נוסחה ראשונית אם φ נוסחה אטומית, או φ היא מהצורה $\exists x\psi$ או $\forall x\psi$.

33.5 עובדה. את קבוצת הנוסחאות בשפה מסדר ראשון $\mathcal{L}$ ניתן להציג כמבנה אינדוקטיבי שבו הבלוקים הם הנוסחאות הראשוניות, והפעולות הן $F_\neg$, $F_\wedge$, $F_\vee$, $F_\leftrightarrow$, $F_\to$, $F_|$ (ראה *11.1*).

34.5 הגדרה. העתקה s מקבוצת הנוסחאות הראשוניות לקבוצה $\{T, F\}$ תיקרא השמת אמת פסוקית. אם s השמת אמת פסוקית, ניתן להרחיבה לפונקציה $\bar{s}$ המוגדרת על כל הנוסחאות כמו בלוגיקת תחשיב פסוקים:

1. אם φ נוסחה ראשונית, $\bar{s}(\varphi) = s(\varphi)$.

2. אם φ היא הנוסחה $\psi_1@\psi_2$ כאשר $@ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, |\}$,

$\bar{s}(\varphi) = G_@(\bar{s}(\psi_1), \bar{s}(\psi_2))$,

כאשר $G_@$ הן הפוקציות שהוגדרו ב 3.2.

3. אם φ היא הנוסחה $(\neg\psi)$, $\bar{s}(\varphi) = G_\neg(\bar{s}(\psi))$.

35.5 הגדרה. נוסחה φ נקראת טאוטולוגיה אם לכל השמת אמת פסוקית s, $\bar{s}(\varphi) = T$.

(נזכור שכאשר אנו מדברים על $\bar{s}$, די לנו לדעת את ערכיה על הנוסחאות הראשוניות המופיעות ב φ, ואלו בדיוק ערכי s).
ראה תרגיל 4.5 לניסוח שקול של הגדרה זו.

36.5 דוגמא.

1. $\forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}) \wedge \exists \mathrm{y}\, \mathrm{Q}(\mathrm{x}) \rightarrow \forall \mathrm{x} \mathrm{P}(\mathrm{x})$ היא טאוטולוגיה.

2. $\forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}) \rightarrow \forall \mathrm{y}\, \mathrm{P}(\mathrm{y})$ אינה טאוטולוגיה.

הוכחת (1): תהי s השמת אמת פסוקית, ותהי φ הנוסחה $\forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}) \wedge \exists \mathrm{y}\, \mathrm{Q}(\mathrm{x}) \rightarrow \forall \mathrm{x} \mathrm{P}(\mathrm{x})$. הערך של $s(\forall \mathrm{x} \mathrm{P}(\mathrm{x}))$ יכול להיות T או F.
אם הערך הוא T, אז $\bar{s}(\varphi) = T$, היות ש φ היא מהצורה $\psi \rightarrow \forall \mathrm{x} \mathrm{P}(\mathrm{x}))$.
אם הערך הוא F, אז

$$\bar{s}(\forall \mathrm{x} \mathrm{P}(\mathrm{x}) \wedge (\exists \mathrm{y} \mathrm{Q}(\mathrm{x}))) \;\; = F$$

ושוב נקבל $\bar{s}(\varphi) = T$.
הוכחת (2): יש השמת אמת פסוקית s שמתאימה T ל $\forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x})$ ו F ל $\forall \mathrm{y}\, \mathrm{P}(\mathrm{y})$ (שים לב, שאלו שני פסוקים שונים, ואין זה משנה אם הם "אומרים אותו דבר").
כעת ניתן רשימה של נוסחאות נכונות. נוסחאות אלו תהיינה האקסיומות שבהן נשתמש בפרק הבא.

37.5 דוגמא. להלן דוגמאות של נוסחאות נכונות:

1. טאוטולוגיות.

2. יהיו φ ו ψ נוסחאות. אזי $\forall \mathrm{x}(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall \mathrm{x}\varphi \rightarrow \forall \mathrm{x}\psi)$ נוסחה נכונה.

3. תהי φ נוסחה, כך ש $\mathrm{x} \notin \mathrm{Free}(\varphi)$. אזי $\varphi \rightarrow \forall \mathrm{x}\varphi$ נוסחה נכונה.

4. הנוסחאות הבאות נכונות:

(א) $\mathrm{x} = \mathrm{x}$.

(ב) $\mathrm{x} = \mathrm{y} \rightarrow \mathrm{y} = \mathrm{x}$.

(ג) $\mathrm{x} = \mathrm{y} \wedge \mathrm{y} = \mathrm{z} \rightarrow \mathrm{x} = \mathrm{z}$.

(ד) $\mathrm{x}_1 = \mathrm{y}_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{x}_k = \mathrm{y}_k \rightarrow (\mathrm{R}\mathrm{x}_1 \ldots \mathrm{x}_k \leftrightarrow \mathrm{R}\mathrm{y}_1 \ldots \mathrm{y}_k)$, כאשר R סמל יחס k־מקומי.

(ה) $\mathrm{x}_1 = \mathrm{y}_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{x}_k = \mathrm{y}_k \to \mathrm{F}\mathrm{x}_1 \ldots \mathrm{x}_k = \mathrm{F}\mathrm{y}_1 \ldots \mathrm{y}_k$, כאשר F סמל פונקציה k־מקומית.

הוכחה. (1) תהי φ טאוטולוגיה. יהי $\mathcal{M}$ מודל. נניח שהמשתנים החופשיים של φ הם בין $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n$, ויהיו $m_1, \ldots, m_n$ איברים של M. תהי $\mathcal{P}$ קבוצת הנוסחאות הראשוניות ψ, שהמשתנים החופשיים שלהן הם בין $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n$, ויהי $\mathcal{L}_0$ המבנה האינדוקטיבי שמתקבל מהבלוקים ב $\mathcal{P}$, בהשתמש בפעולות $F_\wedge$ ו $F_\neg$ בלבד. אזי $\varphi \in \mathcal{L}_0$.

נגדיר השמת אמת s על $\mathcal{L}_0$: לכל $\psi \in \mathcal{P}$,

$$s(\psi) = \begin{cases} T & \mathcal{M} \models \psi(\mathrm{x}_1/m_1, \ldots, \mathrm{x}_k/m_k) \\ F & \mathcal{M} \not\models \psi(\mathrm{x}_1/m_1, \ldots, \mathrm{x}_k/m_k) \end{cases}$$

ונרחיבה לפונקציה $\bar{s}$ כמו ב 34.5. φ טאוטולוגיה, לכן $\bar{s}(\varphi) = T$.

קל לראות באינדוקציה, שלכל $\psi \in \mathcal{L}_0$,

$$\bar{s}(\psi) = T \quad \text{אם ורק אם} \quad \mathcal{M} \models \psi(\mathrm{x}_1/m_1, \ldots, \mathrm{x}_k/m_k)$$

לכן, $\mathcal{M} \models \varphi(\mathrm{x}_1/m_1, \ldots, \mathrm{x}_k/m_k)$.

(2) נניח שיש מודל $\mathcal{M}$ כך ש $\mathcal{M} \not\models \forall\mathrm{x}(\varphi \to \psi) \to \big((\forall\mathrm{x}\varphi) \to (\forall\mathrm{x}\psi)\big)$. אזי, בהנחה שהמשתנים החופשיים של הנוסחה הם $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_k$, יש איברים $m_1, \ldots, m_k$ של M כך שמתקיים

$$\mathcal{M} \models \neg\left(\forall\mathrm{x}(\varphi' \to \psi') \to \big((\forall\mathrm{x}\varphi') \to (\forall\mathrm{x}\psi')\big)\right)$$

(אנו כותבים φ' עבור $\varphi(\mathrm{x}_1/m_1, \ldots, \mathrm{x}_k/m_k)$, וכולי).

(א) $\mathcal{M} \models \forall\mathrm{x}(\varphi' \to \psi')$.

(ב) $\mathcal{M} \models \forall\mathrm{x}\varphi'$.

(ג) $\mathcal{M} \models \neg\forall\mathrm{x}\psi'$.

לפי (ג), יש איבר $m \in M$, כך ש $\mathcal{M} \models \neg\psi'(\mathrm{x}/m)$. אולם לפי (א) ו (ב), $\mathcal{M} \models \varphi'(\mathrm{x}/m) \to \psi'(\mathrm{x}/m)$ ו $\mathcal{M} \models \varphi'(\mathrm{x}/m)$, בסתירה להגדרה 17.5 של $\models$. נשאיר את הנוסחאות הנותרות כתרגיל עבור הקורא. $\square$

תהי φ_1 הנוסחה $\neg\forall\mathrm{x}(\mathrm{x} = \mathrm{y})$, ותהי φ_2 הנוסחה $\neg\forall\mathrm{z}(\mathrm{z} = \mathrm{y})$, כאשר x, y, z משתנים שונים. שתי הנוסחאות אומרות ש y אינו האיבר היחיד בעולם. $\varphi_2(\mathrm{y}/\mathrm{x})$ אומרת ש x אינו האיבר היחיד בעולם. אולם $\varphi_1(\mathrm{y}/\mathrm{x})$ אינה אומרת דבר על x, היות ש x אינו חופשי. דוגמא זאת מובילה להגדרה הבאה.

38.5 הגדרה. יהיו φ $\mathcal{M}$־נוסחה, τ $\mathcal{M}$־עצם, ו x משתנה. נגדיר את $\mathrm{allow}(\varphi, \tau, \mathrm{x})$ ("מותר להחליף את x ב τ בנוסחה φ") באינדוקציה על φ.

1. אם φ אטומית, $\mathrm{allow}(\varphi, \tau, \mathrm{x})$.
2. אם $\varphi = (\neg\psi)$, $\mathrm{allow}(\varphi, \tau, \mathrm{x})$ אם ורק אם $\mathrm{allow}(\psi, \tau, \mathrm{x})$.
3. אם $\varphi = (\psi \wedge \theta)$, $\mathrm{allow}(\varphi, \tau, \mathrm{x})$ אם ורק אם $\mathrm{allow}(\psi, \tau, \mathrm{x})$ וכן $\mathrm{allow}(\theta, \tau, \mathrm{x})$.

4. אם $\varphi = \forall y\psi$, $\text{allow}(\varphi,\tau,x)$ אם ורק אם: או ש $x \notin \text{Fr}(\varphi)$, או ש $\text{allow}(\psi,\tau,x)$ ו $y \notin \text{Var}(\tau)$ (בפרט, זה יתקיים אם y הוא המשתנה x, שכן אז x אינו חופשי ב φ).

במלים אחרות, $\text{allow}(\varphi,\tau,x)$ אם ורק אם לאחר החלפת x ב τ בכל המקומות שבהם x הופיע חופשי, אף משתנה של τ לא הפך לקשור.

39.5 דוגמא. תהי φ הנוסחה $(\forall x\exists y R(x,y,z)) \to \exists yR(x,y,z)$, כאשר x,y,z הם משתנים שונים. אזי מתקיים $\text{allow}(\varphi,g(x,z),x)$, אך לא $\text{allow}(\varphi,f(y),x)$.

40.5 עובדה. כל אחד מהתנאים הבאים גורר ש $\text{allow}(\varphi,\tau,x)$:

(1) הקבוצות $\text{Var}(\tau)$ ו $\text{Bound}(\varphi)$ זרות (בפרט, כאשר τ $\mathcal{M}$־עצם סגור).

(2) $x \notin \text{Fr}(\varphi)$.

הוכחה. תרגיל. □

ראינו ב 14.5, שעבור $\mathcal{M}$־עצם μ, לא בהכרח מתקיים $\mu(x/\tau_1)(y/\tau_2) = \mu(y/\tau_2)(x/\tau_1)$. בכל אופן, אם τ_2 הוא $\mathcal{M}$־עצם סגור, קל לראות ש $\mu(x/\tau_1)(y/\tau_2) = \mu(y/\tau_2)(x/\tau_1')$, כאשר $\tau_1' = \tau_1(y/\tau_2)$. זהו מקרה פרטי של המשפטון הבא.

41.5 משפטון. יהיו $\mathcal{M}$ מודל, $m_1,\ldots,m_k,m$ איברים של M (בפרט, אלו $\mathcal{M}$־עצמים סגורים), $x,y_1,\ldots,y_k$ משתנים שונים, τ ו μ $\mathcal{M}$־עצמים. אזי

$$\mu(x/\tau)(y_1/m_1,\ldots,y_k/m_k,x/m) = \mu'(x/\tau') \qquad (*)$$

כאשר $\mu' = \mu(y_1/m_1,\ldots,y_k/m_k)$ ו $\tau' = \tau(y_1/m_1,\ldots,y_k/m_k,x/m)$.

הוכחה. לשם נוחיות, נכתוב $\overline{y}/\overline{m}$ כקיצור ל $y_1/m_1,\ldots,y_k/m_k$.
נוכיח את הטענה באינדוקציה על $\mathcal{M}$־העצם μ. שלב האינדוקציה טריויאלי, לכן נראה רק את המקרה הבסיסי, שבו μ משתנה או סמל קבוע או איבר של M. אם μ סמל קבוע או איבר של M, או משתנה שאינו בין $x,y_1,\ldots,y_k$, אזי שני הצדדים ב $(*)$ שוים ל μ.
אם μ הוא המשתנה x, אזי $\mu' = x$, ולכן הצד הימני ב $(*)$ שוה ל τ'. הצד השמאלי שוה ל

$$\mu(x/\tau)(\overline{y}/\overline{m},x/m) = \tau(\overline{y}/\overline{m},x/m) = \tau'.$$

אם μ הוא אחד המשתנים y_i, אזי μ' וכן $\mu'(x/\tau')$ שוים ל m_i, ומתקיים

$$\mu(x/\tau)(\overline{y}/\overline{m},x/m) = y_i(\overline{y}/\overline{m},x/m) = m_i$$

□

כעת אנו יכולים להוכיח משפטון דומה עבור נוסחאות.

42.5 משפטון. יהיו $\mathcal{M}$ מודל, $m_1,\ldots,m_k$ איברים של M, $x,y_1,\ldots,y_k$ משתנים שונים, τ $\mathcal{M}$־עצם ו φ $\mathcal{M}$־נוסחה, כך ש $\text{allow}(\varphi,\tau,x)$. אזי

$$\varphi(x/\tau)(y_1/m_1,\ldots,y_k/m_k,x/m) = \varphi'(x/\tau')$$

כאשר $\varphi' = \varphi(y_1/m_1,\ldots,y_k/m_k)$ ו $\tau' = \tau(y_1/m_1,\ldots,y_k/m_k,x/m)$.

הוכחה. באינדוקציה (שוב נכתוב $\overline{\mathrm{y}}/\overline{m}$ במקום $\mathrm{y}_1/m_1,\ldots,\mathrm{y}_k/m_k$).
עבור נוסחאות אטומיות, פשוט משתמשים במשפטון הקודם.
שלב האינדוקציה כאשר $\varphi=\psi_1\wedge\psi_2$ או $\varphi=\neg\psi$ קל.
נותר לנו לטפל במקרה שבו φ מתקבלת מנוסחה ψ בעזרת כמת אוניברסלי. נפריד למקרים:
מקרה 1: $\varphi=[\forall \mathrm{z}\psi]$, כאשר z משתנה השונה מ x וכן מ $\mathrm{y}_1,\ldots,\mathrm{y}_k$. אזי

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathrm{x}/\tau)(\overline{\mathrm{y}}/\overline{m},\mathrm{x}/m) &= [\forall \mathrm{z}\,\psi](\mathrm{x}/\tau)(\overline{\mathrm{y}}/\overline{m},\mathrm{x}/m)\\
&= [\forall \mathrm{z}\,(\psi(\mathrm{x}/\tau)(\overline{\mathrm{y}}/\overline{m},\mathrm{x}/m))]\\
\text{(מהנחת האינדוקציה)}\quad &= [\forall \mathrm{z}\,(\psi(\overline{\mathrm{y}}/\overline{m})(\mathrm{x}/\tau'))]\\
&= [\forall \mathrm{z}\,\psi](\overline{\mathrm{y}}/\overline{m})(\mathrm{x}/\tau')\\
&= \varphi(\overline{\mathrm{y}}/\overline{m})(\mathrm{x}/\tau')
\end{aligned}$$

מקרה 2: $\varphi=[\forall \mathrm{x}\,\psi]$. x אינו חופשי ב $[\forall \mathrm{x}\,\psi]$, לכן

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathrm{x}/\tau)(\overline{\mathrm{y}}/\overline{m},\mathrm{x}/m) &= [\forall \mathrm{x}\,\psi](\mathrm{x}/\tau)(\overline{\mathrm{y}}/\overline{m},\mathrm{x}/m)\\
&= [\forall \mathrm{x}\,\psi](\overline{\mathrm{y}}/\overline{m})\\
&= [\forall \mathrm{x}\,\psi](\overline{\mathrm{y}}/\overline{m})(\mathrm{x}/\tau')\\
&= \varphi(\overline{\mathrm{y}}/\overline{m})(\mathrm{x}/\tau')
\end{aligned}$$

מקרה 3: $\varphi=[\forall \mathrm{y}_i\,\psi]$, לאיזשהו i. כדי לפשט את הסימונים, נניח ש $i=1$. נתון $\mathrm{allow}(\varphi,\tau,\mathrm{x})$, לכן y_1 אינו מופיע ב τ. לכן $\tau'=\tau(\mathrm{y}_2/m_2,\ldots,\mathrm{y}_k/m_k,\mathrm{x}/m)$. מכאן,

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathrm{x}/\tau)(\overline{\mathrm{y}}/\overline{m},\mathrm{x}/m) &= [\forall \mathrm{y}_1\,\psi](\mathrm{x}/\tau)(\mathrm{y}_1/m_1,\mathrm{y}_2/m_2,\ldots,\mathrm{y}_k/m_k,\mathrm{x}/m)\\
&= [\forall \mathrm{y}_1\,\psi(\mathrm{x}/\tau)(\mathrm{y}_2/m_2,\ldots,\mathrm{y}_k/m_k,\mathrm{x}/m)]\\
\text{(מהנחת האינדוקציה)}\quad &= [\forall \mathrm{y}_1\,\psi(\mathrm{y}_2/m_2,\ldots,\mathrm{y}_k/m_k)(\mathrm{x}/\tau')]\\
&= [\forall \mathrm{y}_1\,\psi](\mathrm{y}_2/m_2,\ldots,\mathrm{y}_k/m_k)(\mathrm{x}/\tau')\\
&= [\forall \mathrm{y}_1\,\psi](\mathrm{y}_1/m_1,\mathrm{y}_2/m_2,\ldots,\mathrm{y}_k/m_k)(\mathrm{x}/\tau')\\
&= \varphi(\overline{\mathrm{y}}/\overline{m})(\mathrm{x}/\tau')
\end{aligned}$$

□

43.5 משפט. יהיו φ נוסחה, τ עצם, ו x משתנה, כך ש $\mathrm{allow}(\varphi,\tau,\mathrm{x})$. אזי הנוסחה

$$(\forall \mathrm{x}\,\varphi)\rightarrow\varphi(\mathrm{x}/\tau)$$

נכונה.

הוכחה. ראשית נוכיח את המשפטון עבור המקרה שבו הנוסחה $(\forall \mathrm{x}\,\varphi)\rightarrow\varphi(\mathrm{x}/\tau)$ סגורה, ולאחר מכן נראה כיצד להסיק מזה את המקרה הכללי.
נניח שהנוסחה $(\forall \mathrm{x}\,\varphi)\rightarrow\varphi(\mathrm{x}/\tau)$ סגורה. ראשית נשים לב שאם x אינו חופשי ב φ, אז $\varphi(\mathrm{x}/\tau)=\varphi$ וברור שהנוסחה $(\forall \mathrm{x}\,\varphi)\rightarrow\varphi$ נכונה. כעת נניח ש x חופשי

ב φ. אזי ל φ אין משתנים חופשיים פרט ל $\mathtt{x}$. יהי $b := \tau^{\mathcal{M}}$ הפירוש של τ ב $\mathcal{M}$ ($\mathtt{x}$ חופשי ב φ, לכן בהכרח τ עצם סגור, שכן $\varphi(\mathtt{x}/\tau)$ סגורה). נניח ש $\mathcal{M} \models \forall \mathtt{x}\, \varphi$. אזי מהגדרת $\models$, $\mathcal{M} \models \varphi(\mathtt{x}/b)$. לפי $21.5(3)$, $\mathcal{M} \models \varphi(\mathtt{x}/\tau)$, ולכן $\mathcal{M} \models (\forall \mathtt{x} \varphi) \to \varphi(\mathtt{x}/\tau)$.

לפני שנוכיח את המקרה הכללי, יש להעיר שלמעשה ההוכחה מראה ש

$$(*) \qquad \mathcal{M} \models (\forall \mathtt{x} \varphi) \to \varphi(\mathtt{x}/\tau)$$

לכל $\mathcal{M}$־נוסחה סגורה (אפילו כזאת שאינה נוסחה).

כעת, יהי $\mathcal{M}$ מודל, ותהי $(\forall \mathtt{x} \varphi) \to \varphi(\mathtt{x}/\tau)$ נוסחה (או למעשה $\mathcal{M}$־נוסחה) כלשהי, לא בהכרח סגורה. יהיו $\mathtt{x}, \mathtt{y}_1, \ldots, \mathtt{y}_n$ משתנים שונים, כך שהמשתנים החופשיים של $\forall \mathtt{x} \varphi \to \varphi(\mathtt{x}/\tau)$ נמצאים ביניהם (שים לב ש $\mathtt{x}$ לא בהכרח חופשי ב $\varphi(\mathtt{x}/\tau)$).

יהיו $a, m_1, \ldots, m_n$ איברים של M. יש לוודא ש

$$(**) \qquad \mathcal{M} \models (\forall \mathtt{x} \varphi \to \varphi(\mathtt{x}/\tau))(\mathtt{x}/a, \mathtt{y}_1/m_1, \ldots, \mathtt{y}_n/m_n)$$

נקצר את הסימון $\mathtt{y}_1/m_1, \ldots, \mathtt{y}_n/m_n$ כ $\overline{\mathtt{y}}/\overline{m}$. תהי ψ ה$\mathcal{M}$־נוסחה $\varphi(\overline{\mathtt{y}}/\overline{m})$. אזי $(\forall \mathtt{x}\, \varphi)(\mathtt{x}/a, \overline{\mathtt{y}}/\overline{m}) = \forall \mathtt{x}\, \psi$.

לפי 42.5,

$$\varphi(\mathtt{x}/\tau)(\mathtt{x}/a, \overline{\mathtt{y}}/\overline{m}) = \varphi(\overline{\mathtt{y}}/\overline{m})(\mathtt{x}/\tau')$$

לאיזשהו $\mathcal{M}$־עצם סגור τ'.

היות שהוכחנו את $(*)$ עבור המקרה של $\mathcal{M}$־נוסחה סגורה, אנו יכולים להסיק ש

$$\mathcal{M} \models \forall \mathtt{x}\, \psi \to \psi(\mathtt{x}/\tau')$$

כלומר את $(**)$ לעיל. $\square$

במתמטיקה מקובל לשאול מתי שני מודלים שונים הם "כמעט אותו מודל", כלומר איזומורפיים. כעת נלמד במדויק את המושג של איזומורפיזם בין שני מודלים עבור אותה שפה.

44.5 הגדרה. יהיו $\mathcal{M}$ ו $\mathcal{N}$ מודלים עבור השפה $\mathcal{L}$. נאמר שהפונקציה $\Phi : M \to N$ היא איזומורפיזם אם Φ היא מיפוי (כלומר חח"ע ועל) מ M ל N, ומתקיים

(1) לכל $\mathtt{R} \in \mathcal{R}$, $a_1, \ldots, a_n \in M$,

$$\mathcal{M} \models \mathtt{R}(a_1 \ldots a_n) \text{ אם ורק אם } \mathcal{N} \models \mathtt{R}(\Phi(a_1) \ldots \Phi(a_n))$$

(2) לכל $\mathtt{F} \in \mathcal{F}$, $a_1, \ldots, a_n \in M$,

$$\mathcal{M} \models \mathtt{F}(a_1 \ldots a_n) = b \text{ אם ורק אם } \mathcal{N} \models F(\Phi(a_1) \ldots \Phi(a_n)) = \Phi(b)$$

(3) לכל $\mathtt{c} \in \mathcal{C}$, $\Phi(\mathtt{c}^{\mathcal{M}}) = \mathtt{c}^{\mathcal{N}}$.

במקרה שיש Φ כזאת, נאמר ש $\mathcal{M}$ איזומורפי ל $\mathcal{N}$.

45.5 משפט. יהי $\Phi : M \to N$ איזומורפיזם מ M ל N. תהי $\psi(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$ נוסחה, ויהיו $a_1, \ldots, a_n \in M$. אזי

$$\mathcal{M} \models \psi(a_1, \ldots, a_n) \text{ אם ורק אם } \mathcal{N} \models \psi(\Phi(a_1) \ldots \Phi(a_n))$$

הוכחה. באינדוקציה. □

46.5 הגדרה. נאמר ש $\Phi : M \to M$ אוטומורפיזם אם Φ היא איזומורפיזם מ M ל M.

47.5 הערה. מדי פעם, נציין החלפה בסימון שהוא פחות מדוייק מהסימון הרישמי אך יותר נוח. אם φ היא נוסחה עם משתנה חופשי יחיד x, נכתוב $\varphi(\mathrm{x})$ במקום φ כדי להדגיש ש x הוא המשתנה החופשי של φ. במקום $\varphi(\mathrm{x}/\tau)$ נכתוב לעיתים $\varphi(\tau)$.

בדומה, אם ל φ מספר משתנים חופשיים, נכתוב זאת לעיתים $\varphi(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \ldots)$. בכך נפשט את הנוסחה $\varphi(\mathrm{x}/\sigma, \mathrm{y}/\tau, \ldots)$ להיות $\varphi(\sigma, \tau, \ldots)$.

48.5 הגדרה. נאמר שהקבוצה $Q \subseteq M^n$ גדירה (ניתנת להגדרה) ב $\mathcal{M}$ אם יש נוסחה $\varphi(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$ כך ש

$$(a_1, \ldots, a_n) \in Q \text{ אם ורק אם } \mathcal{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$$

49.5 עובדה. אם Q_1 ו Q_2 (תת קבוצות של M^n) גדירות, אזי גם

$$Q_1 \setminus Q_2 \quad M^n \setminus Q_1 \quad Q_1 \cap Q_2 \quad Q_1 \cup Q_2$$

גדירות.

הוכחה. נניח ש Q_1 ו Q_2 מוגדרות על ידי φ_1 ו φ_2 בהתאמה. אזי
$Q_1 \cup Q_2$ מוגדרת על ידי הנוסחה $\varphi_1 \vee \varphi_2$,
$Q_1 \cap Q_2$ מוגדרת על ידי הנוסחה $\varphi_1 \wedge \varphi_2$,
$M^n - Q_1$ מוגדרת על ידי הנוסחה $(\neg\varphi_1)$,
ו $Q_1 - Q_2$ מוגדרת על ידי הנוסחה $\varphi_1 \wedge (\neg\varphi_2)$. □

50.5 דוגמא.

(א) יהי $\langle \mathbb{N}, +, \cdot \rangle$ המודל של המספרים הטבעיים. אזי הקבוצות הבאות גדירות:

1. $\{1\} = \{\mathrm{x} : (\forall \mathrm{y})(\mathrm{y} \cdot \mathrm{x} = \mathrm{y})\}$.
2. $\{5\} = \{\mathrm{x} : (\exists \mathrm{y})(\forall \mathrm{z}\, \mathrm{y} \cdot \mathrm{z} = \mathrm{z} \wedge \mathrm{y} + \mathrm{y} + \mathrm{y} + \mathrm{y} + \mathrm{y} = \mathrm{x})\}$.
3. $\{p : \text{ראשוני } p\} \cup \{1\} = \{\mathrm{x} : (\forall \mathrm{y})(\forall \mathrm{z})(\mathrm{y} \cdot \mathrm{z} = \mathrm{x} \to \mathrm{y} = \mathrm{x} \vee \mathrm{z} = \mathrm{x})\}$.
4. $\{p : \text{ראשוני } p\}$, בהשתמש ב (1) וב (3).

(ב) יהי $\mathcal{M} = \langle \mathbf{R}, +^{\mathbf{R}}, \cdot^{\mathbf{R}}, 0 \rangle$, כאשר $\mathbf{R}$ הוא קבוצת המספרים הממשיים; ו $+^{\mathbf{R}}$ ו $\cdot^{\mathbf{R}}$ הם החיבור והכפל של ממשיים. אזי הקבוצות הבאות גדירות.

1. $\mathbf{R}^+ = \{\mathrm{x} : (\exists \mathrm{y})(\mathrm{y} \cdot \mathrm{y} = \mathrm{x})\}$.
2. $\{0\} = \{\mathrm{x} : \mathrm{x} = 0\}$.

51.5 משפטון. יהי $\Phi : M \to M$ אוטומורפיזם. תהי $Q \subseteq M^n$ גדירה. אזי Q היא אינווריאנטית תחת Φ, כלומר

$$\{(\Phi(a_1), \dots, \Phi(a_n)) : (a_1, \dots, a_n) \in Q\} = Q$$

הוכחה. תהי $(a_1, \dots, a_n) \in M^n$, ונניח ש Q מוגדרת על ידי $\psi(\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_n)$. אזי לפי 45.5,

$$\begin{array}{ccc} (a_1, \dots, a_n) \in Q & \text{אם ורק אם} & \mathcal{M} \models \psi(a_1, \dots, a_n) \\ \mathcal{M} \models \psi(\Phi(a_1), \dots, \Phi(a_n)) & \text{אם ורק אם} & (\Phi(a_1), \dots, \Phi(a_n)) \in Q \end{array}$$

□

52.5 דוגמא. נראה שהיחס $Q = \{\langle m_1, m_2, m_3 \rangle : m_1 + m_2 = m_3\}$ אינו גדיר ב $\langle \mathbb{N}, \cdot^{\mathbb{N}} \rangle$, כלומר לא ניתן להגדיר את החיבור של טבעיים בעזרת הכפל של טבעיים בלבד.

הוכחה. המשפט היסודי של תורת המספרים אומר, שלכל מספר טבעי יש הצגה יחידה כמכפלת חזקות של מספרים ראשוניים. לכן, אם n מספר טבעי, יהי

$$n = p_1^{k_1} \cdots p_l^{k_l}$$

נגדיר את האוטומורפיזם $\Phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ שמחליף את 3 ואת 5 בהצגה של n כמכפלת חזקות של מספרים ראשוניים. למשל,

$$\begin{aligned} \Phi(3) &= 5 \\ \Phi(3 \cdot 5) &= 5 \cdot 3 = 15 \\ \Phi(5^5) &= 3^5 \\ \Phi(2^2) &= 2^2 \end{aligned}$$

קל לראות שאכן Φ אוטומורפיזם של $\langle \mathbb{N}, \cdot^{\mathbb{N}} \rangle$. לפי משפטון 51.5, אם Q גדירה,

$$Q = \{(\Phi(a_1), \dots, \Phi(a_n)) : (a_1, \dots, a_n) \in Q\}$$

נתבונן ב $(3, 2, 5) \in Q$. $(\Phi(3), \Phi(2), \Phi(5)) = (5, 2, 3) \in Q$, סתירה. □

תרגילים

החלפה

1.5 תרגיל. הגדר במפורש את המושג "$\mathcal{M}$־נוסחה".

2.5 תרגיל. זהה את כל המשתנים החופשיים בנוסחאות הבאות והתאם את הכמת המתאים לכל משתנה קשור.

(א) $\forall x(\exists y P(x,y,z,w) \wedge \forall z \exists x R(y,x,z,w))$

(ב) $\exists x \forall y(\forall z Q(x,z,w,s) \wedge \forall x R(x,z,w,t))$

3.5 תרגיל. יהיו x ו y משתנים שונים, σ ו τ $\mathcal{M}$־עצמים סגורים, ו μ $\mathcal{M}$־עצם. הראה ש

$\mu(x/\sigma)(y/\tau) = \mu(x/\sigma, y/\tau) = \mu(y/\tau)(x/\sigma)$.

טאוטולוגיות פסוקיות

4.5 תרגיל. יהיו $A_1,\dots,A_n$ סמלי פסוקים, ותהי σ העתקה מ $\{A_1,\dots,A_n\}$ לתוך קבוצת הנוסחאות מסדר ראשון. באינדוקציה, נוכל להרחיב את σ להעתקה $\bar{\sigma}$ המוגדרת על כל הפסוקים שניתן לבנות מ $\{A_1,\dots,A_n\}$:

1. $\bar{\sigma}(A_i) = \sigma(A_i)$.

2. $\bar{\sigma}(\alpha @ \beta) = \sigma(\alpha) @ \sigma(\beta)$, עבור $@ \in \{\wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, \vee\}$ ו $\bar{\sigma}(\neg\alpha) = \neg\bar{\sigma}(\alpha)$.

הראה שנוסחה מסדר ראשון φ היא טאוטולוגיה אם ורק אם יש טאוטולוגיה פסוקית α והעתקה σ מ $\mathrm{BKS}(\alpha)$ לתוך קבוצת הנוסחאות מסדר ראשון, כך ש $\bar{\sigma}(\alpha) = \varphi$.

היחס $\models$

5.5 תרגיל. נניח שההחלפות $\varphi(x/y)$ ו $\varphi(x/y)(y/x)$ מותרות.

1. האם $\varphi = \varphi(x/y)(y/x)$? הסבר!

2. אם תשובתך היא לא, מצא תנאי מספיק והכרחי לכך שהשויון יתקיים.

6.5 תרגיל. יהיו x, y משתנים שונים, ויהיו τ העצם y, ו c סמל קבוע. נסמן $\tau' = \tau(x/y, y/c)$, כלומר $\tau' = c$. מצא נוסחה φ כך ש

$\varphi(x/\tau)(y/c) \;\neq\; \varphi(y/c)(x/\tau')$.

7.5 תרגיל. הוכח את משפטון 9.5: יהי τ $\mathcal{M}$־עצם, אזי יש משתנים $y_1,\dots,y_n$ ואיברים $m_1,\dots,m_n$ של M, ויש עצם τ' כך ש $\tau = \tau'(y_1/m_1,\dots,y_n/m_n)$.

תרגיל 8.5. הוכח את 25.5: אם $a = \tau^{\mathcal{M}}$, אזי $\mathcal{M} \models \varphi(x/\tau)$ אם ורק אם $\mathcal{M} \models \varphi(x/a)$.

תרגיל 9.5. אם $\mathcal{M} \not\models \varphi$, האם נובע מכך ש $\mathcal{M} \models \neg\varphi$?

תרגיל 10.5. מצא נוסחאות φ ו ψ עם משתנה חופשי x כך ש $\forall\mathrm{x}\,\varphi \models \forall\mathrm{x}\,\psi$, אבל לא מתקיים $\varphi \models \psi$.

תרגיל 11.5. יהיו $\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_n$ משתנים שונים, ויהיו φ, ψ נוסחאות שאין להן יותר משתנים חופשיים מהנ"ל. הראה ש $\psi \models\mathrel{\mkern-3mu}\dashv \varphi$ אם ורק אם

לכל מודל $\mathcal{M}$, לכל $a_1, \dots, a_n \in M$,

$$\mathcal{M} \models \psi(\mathrm{x}_1/a_1, \dots \mathrm{x}_n/a_n) \quad \text{אם ורק אם} \quad \mathcal{M} \models \varphi(\mathrm{x}_1/a_1, \dots \mathrm{x}_n/a_n)$$

כלומר ה"משמעות" של φ ושל ψ זהה בכל המודלים.

תרגיל 12.5. הוכח את משפטון 26.5(2): תהי $\Gamma \cup \{\varphi\}$ קבוצת נוסחאות סגורות, אזי

$$\Gamma \models \varphi \to \psi \quad \text{אם ורק אם} \quad \Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$$

תרגיל 13.5. הוכח את משפטון 27.5.

תרגיל 14.5. הוכח את משפטון 30.5.

תרגיל 15.5. השלם את הוכחת 37.5.

תרגיל 16.5. הוכח את עובדה 40.5, ומצא דוגמא שבה מתקיים $\mathrm{allow}(\varphi, \tau, \mathrm{x})$, אך אף אחד מהתנאים ב 40.5 אינו מתקיים.

יחסי סדר

תרגיל 17.5. $\mathrm{R}(\mathrm{u}, \mathrm{v})$ הוא יחס סדר במודל $\mathcal{M}$ אם המודל מקיים את הנוסחאות הבאות:

1. $\neg\mathrm{R}(\mathrm{u}, \mathrm{u})$.
2. $\mathrm{R}(\mathrm{u}, \mathrm{v}) \to \neg\mathrm{R}(\mathrm{v}, \mathrm{u})$.
3. $\mathrm{R}(\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2) \wedge \mathrm{R}(\mathrm{u}_2, \mathrm{u}_3) \to \mathrm{R}(\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_3)$.

בהינתן נוסחה $\varphi(\mathrm{x}_1)$, נגדיר קבוצה $A_\varphi \subseteq M$ על ידי

$$A_\varphi := \{a \in M : \mathcal{M} \models \varphi(\mathrm{x}/a)\}$$

באופן דומה, בהינתן נוסחה עם שני משתנים חופשיים $\varphi(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2)$, נגדיר את $A_\varphi \subseteq M \times M$ על ידי

$$A_\varphi := \{\langle a, b\rangle : a \in M, b \in M, \mathcal{M} \models \varphi(\mathrm{x}_1/a, \mathrm{x}_2/b)\}$$

A נקראת הקבוצה המאופיינת על ידי φ. מהן הקבוצות המאופיינות על ידי הנוסחאות הבאות?

(א) R יחס סדר במודל $\mathcal{M}$ ו $\varphi(\mathrm{u},\mathrm{v})=\neg\mathrm{R}(\mathrm{u},\mathrm{v})$.

(ב) R יחס סדר במודל $\mathcal{M}$ ו $\varphi(\mathrm{u},\mathrm{v})=\neg R(u,v)\wedge\neg R(v,u)$.

(ג) R יחס סדר במודל $\mathcal{M}$ שמהווה עץ, כלומר, המודל מקיים את הנוסחה הבאה:

$$\mathrm{R}(\mathrm{u}_1,\mathrm{u}_2)\wedge\mathrm{R}(\mathrm{u}_1,\mathrm{u}_3)\rightarrow\mathrm{R}(\mathrm{u}_2,\mathrm{u}_3)\vee\mathrm{R}(\mathrm{u}_3,\mathrm{u}_2)\vee(\mathrm{u}_2=\mathrm{u}_3),$$

וכן $\varphi(\mathrm{u},\mathrm{v})=\neg\mathrm{R}(\mathrm{v},\mathrm{u})$.

18.5 תרגיל. תאר את כל המודלים שמקיימים את הנוסחה

$$\forall\mathrm{x}\forall\mathrm{y}\exists\mathrm{z}(\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})\rightarrow\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{z})\wedge R(\mathrm{z},\mathrm{y}))$$

כאשר R יחס סדר.

19.5 תרגיל. תהי $\mathcal{L}$ השפה מסדר ראשון בלי סמל השוויון ועם בדיוק n סמלי יחסים אונאריים. לכל נוסחה $\varphi\in\mathcal{L}$, יהי K_φ המספר הקטן ביותר של איברים במודל המקיים את φ. מצא נוסחה φ שעבורה K_φ מקסימלי (כלומר, לכל $\psi\in\mathcal{L}$, $K_\varphi\geq K_\psi$). מהו K_φ?

נכונות

20.5 תרגיל.

(א) הראה ש $\models\exists\mathrm{u}(\varphi\vee\psi)\leftrightarrow\exists\mathrm{u}\varphi\vee\exists\mathrm{u}\psi$.

(ב) נניח ש u אינו חופשי ב φ. הוכח:

1. $\models\exists\mathrm{u}(\varphi\wedge\psi)\leftrightarrow\varphi\wedge\exists\mathrm{u}\psi$.
2. $\models\forall\mathrm{u}(\varphi\vee\psi)\leftrightarrow\varphi\vee\forall u\psi$.

21.5 תרגיל. בשפה שבה אך ורק סמל יחס אונארי יחיד, מצא:

(א) נוסחאות φ, ψ עבורן $\forall\mathrm{u}(\varphi\vee\psi)$ אינה שקולה (במובן של $\models\!\mid\!\models$) ל $\forall\mathrm{u}\varphi\vee\forall\mathrm{u}\psi$.

(ב) נוסחאות φ, ψ שעבורן $\exists\mathrm{u}(\varphi\wedge\psi)$ אינה שקולה ל $\exists\mathrm{u}\varphi\wedge\exists\mathrm{u}\psi$.

22.5 תרגיל. לכל אחת מהנוסחאות הבאות, הוכח שהנוסחה נכונה או מצא דוגמה נגדית (כלומר מודל שאינו מקיים את הנוסחה).

(א) $\forall\mathrm{u}(\mathrm{P}(\mathrm{u})\rightarrow\mathrm{R}(\mathrm{u}))\rightarrow(\forall\mathrm{u}\mathrm{P}(\mathrm{u})\rightarrow\forall\mathrm{u}\mathrm{R}(\mathrm{u}))$.

(ב) $(\forall\mathrm{u}\mathrm{P}(\mathrm{u})\rightarrow\forall\mathrm{u}\mathrm{R}(u))\rightarrow\forall\mathrm{u}(\mathrm{P}(\mathrm{u})\rightarrow\mathrm{R}(\mathrm{u}))$.

23.5 תרגיל. מי מהנוסחאות הבאות נכונה תמיד? הוכח!

(א) $\forall\mathrm{u}(\varphi\rightarrow\psi)\rightarrow(\forall\mathrm{u}\varphi\rightarrow\forall\mathrm{u}\psi)$.

(ב) $(\forall u\varphi \rightarrow \forall u\psi) \rightarrow \forall u(\varphi \rightarrow \psi)$,
כאשר u אינו חופשי ב ψ.

(ג) $(\forall u\varphi \rightarrow \forall u\psi) \rightarrow \forall u(\varphi \rightarrow \psi)$,
כאשר u אינו חופשי ב φ.

24.5 תרגיל. תהי $\varphi(u, v_1, \ldots, v_n)$ נוסחה בשפה $\mathcal{L}$ עם משתנים חופשיים u, v_1, $\ldots$, v_n ויהיו x, y שני משתנים שאינם מופיעים ב φ. הוכח או הפרך את נכונות כל אחת מהנוסחאות הבאות:

(א) $\forall u\varphi(u, v_1, \ldots, v_n) \rightarrow \exists u\varphi(u, v_1, \ldots, v_n)$.

(ב) $\forall u\varphi(u, v_1, \ldots, v_n) \rightarrow \forall x\forall y\varphi(F(x, y), v_1, \ldots, v_n)$,
כאשר F סמל פונקציה ב $\mathcal{L}$.

(ג) $\exists u\varphi(u, v_1, \ldots, v_n) \rightarrow \exists x\exists y\varphi(F(x, y), v_1, \ldots, v_n)$,
כאשר F סמל פונקציה ב $\mathcal{L}$.

25.5 תרגיל. תהי $\mathcal{L}_1$ השפה עם הסמלים P_1, F_1, c_1 בלבד.

1. מצא שני פירושים שונים עבור $\mathcal{L}_1$ במודל שעולמו הוא קבוצת המספרים הטבעיים, ל $P_1(x, y)$ הפירוש $x \leq y$, והנוסחה הבאה נכונה בשני הפירושים:

$$\forall x(P_1(F_1(x, c_1), x) \wedge P_1(x, F(x, c_1)))$$

2. האם הנוסחה הבאה נכונה בשני הפירושים?

$$\forall x\forall y(F_1(x, y) = F_1(y, x))$$

3. אם תשובתך ל (2) חיובית, מצא פירוש שלישי, שבו הנוסחה אינה נכונה. אם התשובה שלילית, מצא פירוש שלישי שבו הנוסחה נכונה.

26.5 תרגיל. תהי φ הנוסחה הבאה

$$[\forall xP(x, x) \wedge \forall x\forall y\forall z(P(x, y) \wedge P(y, z) \rightarrow P(x, z)) \quad \wedge \quad \forall x\forall y(P(x, y) \vee P(y, x))] \\ \rightarrow \quad [\exists x\forall yP(x, y)]$$

הוכח שכל מודל סופי (דהיינו מודל עם עולם סופי) מקיים את φ אולם יש מודל (אינסופי) שאינו מקיים את φ.

איזומורפיזמים וקבוצות גדירות

27.5 תרגיל. יהיו $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ ו $\mathcal{W}$ מודלים עבור אותה שפה. הוכח:

(א) $\mathcal{M}$ איזומורפי לעצמו.

(ב) אם $\mathcal{M}$ איזומורפי ל $\mathcal{N}$ אז $\mathcal{N}$ איזומורפי ל $\mathcal{M}$.

(ג) אם $\mathcal{M}$ איזומורפי ל $\mathcal{N}$ וכן $\mathcal{N}$ איזומורפי ל $\mathcal{W}$, אז $\mathcal{M}$ איזומורפי ל $\mathcal{W}$.

28.5 תרגיל. יהיו $c_1, \ldots, c_k \in \mathcal{C}$ קבועים בשפה $\mathcal{L}$, ויהי $\mathcal{M}$ מודל עבור השפה $\mathcal{L}$. הוכח שהקבוצה $\{c_1^{\mathcal{M}}, \ldots, c_k^{\mathcal{M}}\}$ גדירה ב $\mathcal{M}$.

29.5 תרגיל.

(א) הוכח שהקבוצה $\emptyset$ גדירה.

(ב) הוכח שלכל n, הקבוצה M^n גדירה.

30.5 תרגיל. מצא נוסחה המגדירה את $\{0\}$ במודל $\mathcal{M} = \langle \mathbb{R}, +^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}} \rangle$.
שים לב: הפעם אין בשפה סמל קבוע עבור 0.

פרק 6

מערכות הוכחה

בפרק זה נלמד את המושג "הוכחה". המתמטיקה של המאה הנוכחית הוש־פעה רבות מהשיטה האקסיומטית של אוקלידס. דוגמאות טיפוסיות למערכות אקסיומטיות הן גאומטריה, תורת המספרים ותורת הקבוצות. בעזרת מערכות אקסיומטיות ניתן למסד את העקרונות הבסיסיים מהם המתמטיקאים מפתחים את הנושא.

גם בלוגיקה המתמטית אנו משתמשים במערכת אקסיומטית. ההבדל היחיד הוא, שאנו מפרמלים את מושג ההוכחה, בהגדירנו מערכת הוכחה, שנקראת גם מערכת דדוקטיבית. סכמאטית, יהיו לנו קבוצת אקסיומות ו כללי הוכחה. כדי לקבל משפטים, נפעיל את כללי ההוכחה על האקסיומות ועל משפטים שכבר הוכחו.

מהן האקסיומות שנבחר כאקסיומות של הלוגיקה? אין זו שאלה קלה. הקריטריון היחיד שלנו הוא, שעל קבוצת האקסיומות להיות "פשוטה". בדרך כלל רצוי, שבנוסף לכך הקבוצה תהיה "חסכונית", במובן שהקבוצה לא תכיל אקסיומות "מיותרות".

על קבוצת האקסיומות ללכוד את "האמת הלוגית". פרושו של דבר, שאם Γ היא אוסף כל הנוסחאות $\varphi \in \mathcal{L}$, שהן "נכונות מבחינה לוגית", אזי נוכל להוכיח את φ בעזרת האקסיומות, ולהיפך: כל נוסחה שנוכל להוכיח מהאקסיומות תהיה שייכת ל Γ, כלומר תהיה נכונה. כמובן, על כל הנוסחאות להיות ב $\mathcal{L}$.

ל"אמת הלוגית" יש הגדרה פשוטה, לאור הדיון בפרק 1.3: אנו אומרים שנוסחה φ היא נכונה מבחינה לוגית אם ורק אם φ נכונה, כלומר כל מודל של השפה $\mathcal{L}$ מקיים אותה. אנו כותבים זאת: $\models \varphi$.

לכן, הקבוצה הפשוטה ביותר של אקסיומות שיכולים היינו לבחור היא

$$\Gamma := \{\varphi \in \mathcal{L} : \models \varphi\}$$

ואז היינו אומרים ש φ משפט אם ורק אם φ אקסיומה. במלים אחרות, היתה לנו מערכת אינדוקטיבית שבה Γ היא קבוצת הבלוקים, ואין פעולות.

זוהי מערכת הוכחה טריויאלית מאד, והיא מספקת את דרישותינו, אך הדרך היחידה לברר האם נוסחה מסויימת היא משפט, היא לבדוק את נכונות הנוסחה בכל המודלים.

החיסרון העיקרי של מערכת אקסיומטית זאת היא, שהיא אינה מספקת שיטה תחבירית שבה נוכל להשתמש כדי לבדוק האם נוסחה היא נכונה. "שיטה

תחבירית" משתמשת אך ורק בנוסחאות עצמן, כסדרות סופיות של תוים, ואינה דורשת בדיקה של מספר אינסופי של מודלים. בפרק זה נפתח מערכת הוכחה לוגית תחבירית. כל נוסחה שניתן יהיה להוכיח במערכת זו תהיה נכונה. המשפט העיקרי בפרק הבא יראה שזאת המערכת "הנכונה", כלומר שכל נוסחה נכונה ניתנת להוכחה במערכת זאת.

בפרקים הקודמים הראנו שאנו יכולים לצמצם את השפה שלנו לקשרים $\{\neg, \wedge\}$ ולכמת $\forall$ בלבד, ועדיין נוכל לבטא כל נוסחה אחרת מ $\mathcal{L}$ בדרך שקולה אלמנטרית (במובן של $\models\!\mid$). לכן, כדי לקצר את ההוכחות האינדוקטיביות, נעבוד בשפה מצומצמת זו. כאשר אנו משתמשים בקשרים אחרים, או בכמת $\exists$, יש להבין זאת כקיצור בלבד. למשל $\exists x\varphi$ היא קיצור של $\neg\forall x\neg\varphi$, $\varphi \to \psi$ היא קיצור של $\neg(\varphi \wedge \neg\psi)$, וכולי.

עבור פרק זה, נקבע שפה מסדר ראשון $\mathcal{L}$.

את האקסיומות נסווג למספר קבוצות:

ראשית, נגדיר תת קבוצה של האקסיומות, אלו האקסיומות "הטהורות". לאחר מכן נגדיר את המושג אקסיומה לוגית להיות אקסיומה שהתקבלה בעזרת כימות אוניברסלי מאקסיומה טהורה.

יהיו לנו שבע קבוצות של אקסיומות "טהורות", כדלהלן:

1.6 אקסיומה (קבוצת אקסיומות I – טאוטולוגיות)**.** תהי φ נוסחה. אם φ טאוטולוגיה (ראה *35.5*), אזי φ אקסיומה טהורה.

2.6 אקסיומה (קבוצת אקסיומות II – אקסיומות הפילוג)**.** יהיו φ ו ψ נוסחאות, ו x משתנה. אזי

$$\forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\,\varphi \to \forall x\,\psi)$$

אקסיומה טהורה.

3.6 אקסיומה (קבוצת אקסיומות III – אקסיומות ההחלפה)**.** יהיו φ נוסחה, x משתנה ו τ עצם, כך שמתקיים $\mathrm{allow}(\varphi, \tau, x)$. אזי

$$\forall x\,\varphi \to \varphi(x/\tau)$$

אקסיומה טהורה.

4.6 אקסיומה (קבוצת אקסיומות IV – אקסיומות ההכללה)**.** יהיו φ נוסחה, x משתנה, כך ש $x \notin \mathrm{Free}(\varphi)$. אזי

$$\varphi \to \forall x\,\varphi$$

אקסיומה טהורה.

5.6 אקסיומה (קבוצת אקסיומות V – אקסיומות הזהות)**.** יהיו x, y ו z משתנים (לא בהכרח שונים). אזי

$$x = x$$

$$x = y \to y = x$$

$$x = y \wedge y = z \to x = z$$

אקסיומות טהורות.

6.6 אקסיומה (קבוצת אקסיומות VI – אקסיומות הזהות עבור יחסים). יהיו R סמל יחס k־מקומי, $x_1, \dots, x_k$ ו $y_1, \dots, y_k$ משתנים. אזי

$$x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_k = y_k \ \to\ (R(x_1, \dots, x_k) \leftrightarrow R(y_1, \dots, y_k))$$

אקסיומה טהורה.

7.6 אקסיומה (קבוצת אקסיומות VII – אקסיומות הזהות עבור פונקציות). יהיו F סמל פונקציה k־מקומית, $x_1, \dots, x_k$ ו $y_1, \dots, y_k$ משתנים. אזי

$$x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_k = y_k \to F(x_1, \dots, x_k) = F(y_1, \dots, y_k)$$

אקסיומה טהורה.

8.6 הגדרה. נוסחה φ היא אקסיומה לוגית אם יש אקיומה טהורה ψ ומשתנים $y_1, \dots, y_n$ כך ש

$$\varphi = \forall y_1 \cdots \forall y_n\, \psi$$

כאן אנו כוללים גם את המקרה $n = 0$, כלומר האקסיומות הטהורות הן מקרה פרטי של אקסיומות לוגיות.

בטבלה הבאה נביא דוגמאות של אקסיומות טהורות. נדגים זאת עבור שפה $\mathcal{L}$ שבה סמל יחס אונארי R, סמל יחס בינארי Q, סמל פונקציה אונארית f, וסמל קבוע c. v, x, y, z הם משתנים שונים.

קבוצה	שם האקסיומה	דוגמא
I	טאוטולוגיה	$[R(x) \wedge \forall y Q(x, y)] \to R(x)$
II	פילוג	$\forall x(R(x) \to x = c) \to [(\forall x\, R(x)) \to (\forall x\, x = c)]$
III	החלפה	$\forall x(R(x) \to \exists y Q(x, y)) \to$ $\to (R(f(c)) \to \exists y Q(f(c), y))$
IV	הכללה	$\exists y Q(x, y) \to \forall z\, \exists y Q(x, y)$
V	זהות 1 זהות 2 זהות 3	$x = x$ $x = y \to y = x$ $x = y \wedge y = z \to x = z$
VI	זהות עבור יחסים	$x = y \wedge z = v \to (Q(x, z) \leftrightarrow Q(y, v))$
VII	זהות עבור פונקציות	$x = y \to f(x) = f(y)$

המשימה הבאה שלנו היא להגדיר את כללי ההוכחה שיאפשרו לנו להוכיח משפטים לוגיים מהאקסיומות. יהיה רק כלל אחד. כלל זה נקרא "מודוס פוננס". דוגמא לשימוש יום יומי במודוס פוננס היא:

1. אנו יודעים שאחרי ברק יש רעם.

2. אנו רואים ברק.
3. לכן, אנו מסיקים שיהיה רעם.

פורמאלית, נגדיר את הכלל כך:

9.6 הגדרה. יהיו φ_1, φ_2 ו ψ נוסחאות. נאמר ש

ψ נגזרת (מתקבלת) מ φ_1 ו φ_2 על ידי מודוס פוננס *(MP)*

אם

φ_1 היא מהצורה $\varphi_2 \to \psi$

במלים אחרות, בהינתן הנוסחאות φ_2 ו $\varphi_2 \to \psi$, אנו אומרים ש ψ נגזרת מנוסחאות אלו על ידי MP.
בדוגמא הקודמת, אם נכתוב φ_2 עבור "יש ברק" ו ψ עבור "יש רעם", אזי

1. אם φ_2, אזי ψ.
2. φ_2.
3. לכן, ψ.

כעת אנו יכולים להציג את המינוח המרכזי בפרק זה:

10.6 הגדרה. תהי $\bar{\varphi} = \langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle$ סידרה של נוסחאות. $\bar{\varphi}$ היא הוכחה/גזירה (פורמאלית) אם לכל j, $1 \leq j \leq n$, (לפחות) אחד מהבאים מתקיים:

1. φ_j אקסיומה לוגית.
2. יש $i, k < j$ כך ש φ_j נגזרת מ φ_i ו φ_k על ידי MP (כלומר, φ_i היא הנוסחה $\varphi_k \to \varphi_j$).

11.6 הגדרה. תהי φ נוסחה. φ היא משפט (לוגי) אם יש הוכחה $\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle$ כך ש $\varphi_n = \varphi$. נכתוב בקיצור $\vdash \varphi$.

במלים אחרות, נוסחה היא משפט אם ניתן לקבלה מהאקסיומות בהשתמש בכלל המודוס פוננס. ניתן לבטא עובדה זאת גם בצורה הבאה:

12.6 הערה. קבוצת המשפטים היא מבנה אינדוקטיבי: הבלוקים הם האקסיומות, והפעולה היחידה היא הפונקציה MP, המוגדרת על ידי

$$MP(\varphi, \psi) = \begin{cases} \chi & \psi = \varphi \to \chi \\ \psi & \text{אחרת} \end{cases}$$

כלומר $MP(\varphi, \varphi \to \chi) = \chi$ (ובכל מקרה אחר הפונקציה MP אינה מחדשת דבר).

כשאנו מוכיחים טענה "באינדוקציה על ההוכחה של φ" כוונתנו לכך שאנו משתמשים באינדוקציה על מבנה זה.

במתמטיקה אנו עובדים בדרך כלל בענף מסויים, כגון תורת המספרים. לכל ענף במתמטיקה יש את קבוצת האקסיומות שלו, שתיקרא Γ. נאמר שניתן להוכיח משפט מ Γ בעזרת כללי הוכחה מסויימים, המקובלים על הקהילייה המתמטית. בלוגיקה מתמטית אנו מגדירים במדוייק כיצד להוכיח משפטים מ Γ. להלן ההגדרה הפורמאלית של מושג ההוכחה מתוך אקסיומות.

13.6 הגדרה. תהי $\bar{\varphi} = \langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle$ סידרה של נוסחאות. $\bar{\varphi}$ היא הוכחה/גזירה (לוגית) מ Γ אם לכל j, $1 \leq j \leq n$, (לפחות) אחד מהבאים מתקיים

1. φ_j אקסיומה.
2. יש $i, k < j$ כך ש $\varphi_i = \varphi_k \to \varphi_j$.
3. $\varphi_j \in \Gamma$ (במקרה זה, φ_j נקראת אקסיומה לא־לוגית).

14.6 הגדרה. תהי Γ קבוצת נוסחאות, ותהי φ נוסחה. φ היא משפט של Γ, בסמלים,

$$\Gamma \vdash \varphi$$

אם יש הוכחה $\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle$ מ Γ כך ש $\varphi = \varphi_n$.

15.6 תוצאה.

1. כל נוסחה מ Γ היא משפט של Γ.
2. כל אקסיומה לוגית היא משפט של Γ.
3. אם $\Gamma \subseteq \Gamma'$, אזי כל משפט של Γ הוא גם משפט של Γ'.

16.6 תוצאה. תהי Γ קבוצת נוסחאות. אזי $\Gamma \vdash \varphi$ אם ורק אם יש קבוצה סופית $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ כך ש $\Gamma_0 \vdash \varphi$.

הוכחה. כל שלב בגזירה משתמש לכל היותר באקסיומה לא לוגית אחת מ Γ, ויש רק מספר סופי של שלבים. פורמאלית, תהי $\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle$ גזירה של φ מ Γ. תהי ψ_0 נוסחה מ Γ (אם Γ ריקה, או אפילו סופית, אז אין מה להוכיח). לכל $i \leq n$ נתאים את הנוסחה $\psi_i \in \Gamma$ בצורה הבאה:

1. אם $\varphi_i \in \Gamma$, $\psi_i := \varphi_i$.
2. אם $\varphi_i \notin \Gamma$, $\psi_i := \psi_0$.

במקרה (2), φ אינה אקסיומה לא־לוגית, לכן היא אקסיומה לוגית, או שהתקבלה על ידי מודוס פוננס משתי נוסחאות קודמות. לכן $\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle$ היא למעשה גזירה מ $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$. □

17.6 הערה. נניח ש $\Gamma \vdash \varphi$ וכן $\varphi \Rightarrow \psi$ (כלומר, $\varphi \to \psi$ היא טאוטולוגיה, ראה 35.5). אזי $\Gamma \vdash \psi$. במקרה זה אנו אומרים, שקיבלנו את $\Gamma \vdash \psi$ מ $\Gamma \vdash \varphi$ על ידי "סיבתיות טאוטולוגית".

הוכחה. $\psi \rightarrow \varphi$ טאוטולוגיה, לכן אקסיומה. לכן, $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$. בעזרת מודוס פוננס אנו מקבלים $\Gamma \vdash \psi$. $\square$

18.6 הערה. במקום לומר "$\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle$ היא גזירה מ Γ", אנו כותבים

$$\begin{array}{cccc} 1 & \Gamma & \vdash & \varphi_1 \\ & & \vdots & \\ n & \Gamma & \vdash & \varphi_n \end{array}$$

19.6 דוגמא. נראה כיצד לגזור את המשפט $\{\forall \mathrm{x}(\varphi \rightarrow \psi)\} \vdash \exists \mathrm{x}\varphi \rightarrow \exists \mathrm{x}\psi$.

(זכור ש $\exists \mathrm{x}$ הוא למעשה קיצור של $\neg\forall \mathrm{x}\neg$).

$1\ \forall \mathrm{x}(\varphi \rightarrow \psi) \vdash \forall \mathrm{x}((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi))$	(קבוצה I)
$2\ \forall \mathrm{x}(\varphi \rightarrow \psi) \vdash \forall \mathrm{x}((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)) \rightarrow$ $\rightarrow (\forall \mathrm{x}(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \forall \mathrm{x}(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi))$	(קבוצה II)
$3\ \forall \mathrm{x}(\varphi \rightarrow \psi) \vdash (\forall \mathrm{x}(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \forall \mathrm{x}(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi))$	(MP)
$4\ \forall \mathrm{x}(\varphi \rightarrow \psi) \vdash \forall \mathrm{x}(\varphi \rightarrow \psi)$	(אקסיומה לא־לוגית)
$5\ \forall \mathrm{x}(\varphi \rightarrow \psi) \vdash \forall \mathrm{x}(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$	(MP)
$6\ \forall \mathrm{x}(\varphi \rightarrow \psi) \vdash \forall \mathrm{x}(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\forall \mathrm{x}\neg\psi \rightarrow \forall \mathrm{x}\neg\varphi)$	(קבוצה II)
$7\ \forall \mathrm{x}(\varphi \rightarrow \psi) \vdash \forall \mathrm{x}\neg\psi \rightarrow \forall \mathrm{x}\neg\varphi$	(MP)
$8\ \forall \mathrm{x}(\varphi \rightarrow \psi) \vdash (\forall \mathrm{x}\neg\psi \rightarrow \forall \mathrm{x}\neg\varphi) \rightarrow (\neg\forall \mathrm{x}\neg\varphi \rightarrow \neg\forall \mathrm{x}\neg\psi)$	(קבוצה I)
$9\ \forall \mathrm{x}(\varphi \rightarrow \psi) \vdash \neg\forall \mathrm{x}\neg\varphi \rightarrow \neg\forall \mathrm{x}\neg\psi$	(MP)

(הערה: לפי 2.6 להלן, זה גורר ש $\emptyset \vdash \forall \mathrm{x}[\varphi \rightarrow \psi] \rightarrow [\exists \mathrm{x}\varphi \rightarrow \exists \mathrm{x}\psi]$).

1.6 משפט (משפט הנכונות)**.** תהי Γ קבוצת נוסחאות סגורות, ויהי $\mathcal{M}$ מודל של Γ (כלומר $\mathcal{M} \models \Gamma$). תהי φ נוסחה כך ש $\Gamma \vdash \varphi$. אזי $\mathcal{M} \models \varphi$
(במלים אחרות, אם $\Gamma \vdash \varphi$, אז $\Gamma \models \varphi$).

הוכחה. באינדוקציה על ההוכחה, כלומר על המבנה האינדוקטיבי שהוגדר ב 12.6:

1. אם $\varphi \in \Gamma$, אזי מהנתון, $\mathcal{M} \models \varphi$.
2. אם φ אקסיומה לוגית, אזי φ נכונה, ובפרט $\mathcal{M} \models \varphi$.
3. אם φ נגזרת מ $\psi \rightarrow \varphi$ ומ ψ, אזי מהנחת האינדוקציה, $\mathcal{M} \models \psi \rightarrow \varphi$ וכן $\mathcal{M} \models \psi$, ולכן מ 26.5, $\mathcal{M} \models \varphi$.

$\square$

20.6 תוצאה. יהיו φ משפט לוגי (*11.6*) ו $\mathcal{M}$ מודל. אזי $\mathcal{M} \models \varphi$ (במלים אחרות, אם $\vdash \varphi$, אז $\models \varphi$).

21.6 הערה.

1. אם $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ וכן $\Gamma \vdash \varphi$, אזי $\Gamma \vdash \psi$.
2. אם $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$, אזי $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$.

המשפט הבא מראה, שגם הכיוון ההפוך של התוצאה האחרונה נכון:

2.6 משפט (משפט הדדוקציה)**.** נניח $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$, אזי $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.

הוכחה. תהי

$$\begin{array}{l} \Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \ \psi_1 \\ \qquad \cdots \\ \Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \ \psi_n \end{array}$$

גזירה של $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi (= \psi_n)$. נבנה גזירה של $\Gamma \vdash \varphi \to \psi_n$ על ידי החלפת כל שורה $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi_k$ בשורה אחת, או בשלש שורות מהצורה $\Gamma \vdash \ldots$, שמסתיימות ב $\Gamma \vdash \varphi \to \psi_k$.

אם ψ_k אקסיומה לוגית או לא־לוגית מ Γ, נחליף את $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi_k$ ב

$\Gamma \vdash \psi_k$	(אקסיומה לוגית או לא־לוגית)
$\Gamma \vdash \psi_k \to (\varphi \to \psi_k)$	(קבוצה I (טאוטולוגיה))
$\Gamma \vdash \varphi \to \psi_k$	(MP)

אם ψ_k היא האקסיומה הלא־לוגית φ, אז $\varphi \to \psi_k$ היא למעשה הטאוטולוגיה $\varphi \to \varphi$. לכן נוכל להחליף את $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi_k$ ב

$\Gamma \vdash \ \varphi \to \psi_k$	(קבוצה I)

נניח ש ψ_k התקבלה על ידי מודוס פוננס, נניח מ $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi_i \to \psi_k$ ומ $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi_i$. שתי שורות אלו, שמופיעות לפני ψ_k, כבר הוחלפו בבניה שלנו על ידי השורות

$$\Gamma \vdash \varphi \to (\psi_i \to \psi_k)$$

$$\Gamma \vdash \varphi \to \psi_i.$$

נחליף את $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi_k$ ב

$\Gamma \vdash (\varphi \to (\psi_i \to \psi_k)) \to ((\varphi \to \psi_i) \to (\varphi \to \psi_k))$	(קבוצה I)
$\Gamma \vdash (\varphi \to \psi_i) \to (\varphi \to \psi_k)$	(MP)
$\Gamma \vdash \varphi \to \psi_k$	(MP)

לאחר החלפת כל השורות $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi_k$ של הגזירה המקורית, נקבל גזירה של $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$. □

ראה תרגיל 6.6 לניסוח אחר של ההוכחה.

22.6 הגדרה. Γ אינה עקבית אם יש נוסחה φ כך ש $\Gamma \vdash \varphi$ וכן $\Gamma \vdash \neg\varphi$. אחרת, Γ עקבית.

23.6 תוצאה. (1) Γ אינה עקבית אם ורק אם יש φ כך ש $\Gamma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$.
(2) Γ אינה עקבית אם ורק אם $\Gamma \vdash \psi$ לכל ψ.

הוכחה. (1) תרגיל.
(2) שים לב ש $\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$ היא טאוטולוגיה. לכן, אם $\Gamma \vdash \varphi$ ו $\Gamma \vdash \neg\varphi$, אז על ידי הפעלת מודוס פוננס פעמיים נקבל את $\Gamma \vdash \psi$. □

24.6 משפט. $\Gamma \vdash \varphi$ אם ורק אם $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ אינה עקבית.

הוכחה. נניח ש $\Gamma \vdash \varphi$. הואיל ו $\Gamma \subseteq \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \varphi$. כעת, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\varphi$ (אקסיומה לא־לוגית). לכן $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ אינה עקבית.
ולכהיפך, נניח ש $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ אינה עקבית. אזי לפי 23.6, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \varphi$. ממשפט הדדוקציה,

$$\Gamma \vdash \neg\varphi \to \varphi$$

ומהטאוטולוגיה $(\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$, נקבל $\Gamma \vdash \varphi$. □

3.6 משפט (משפט ההכללה). תהי Γ קבוצת נוסחאות, ויהי x משתנה כך שלכל $\psi \in \Gamma$, $\mathrm{x} \notin \mathrm{Free}(\psi)$. נניח ש $\Gamma \vdash \varphi$, אזי $\Gamma \vdash \forall \mathrm{x}\varphi$.

הוכחה. באינדוקציה על ההוכחה.
מקרה (1): φ אקסיומה לוגית. אזי $\forall \mathrm{x}\varphi$ אקסיומה לוגית.
מקרה (2): $\varphi \in \Gamma$. אזי $\mathrm{x} \notin \mathrm{Free}(\varphi)$. לכן, $\varphi \to \forall \mathrm{x}\varphi$ אקסיומה לוגית (קבוצה IV), ולכן $\Gamma \vdash \varphi \to \forall \mathrm{x}\varphi$ וכן $\Gamma \vdash \varphi$. מכאן, $\Gamma \vdash \forall \mathrm{x}\varphi$.
מקרה (3): יש נוסחה ψ כך ש

$$\Gamma \vdash \psi \to \varphi \text{ וכן } \Gamma \vdash \psi$$

אזי $\Gamma \vdash \forall \mathrm{x}\psi$, וכן $\Gamma \vdash \forall \mathrm{x}(\psi \to \varphi)$. $\forall \mathrm{x}(\psi \to \varphi) \to (\forall \mathrm{x}\psi \to \forall \mathrm{x}\varphi)$ אקסיומה לוגית (קבוצה II). לכן על ידי הפעלת מודוס פוננס, נקבל

$$\Gamma \vdash \forall \mathrm{x}\psi \to \forall \mathrm{x}\varphi$$

ועל ידי הפעלה נוספת של מודוס פוננס,

$$\Gamma \vdash \forall \mathrm{x}\varphi.$$

□

25.6 דוגמא. לא ניתן לוותר על ההנחה ש x אינו חופשי באף אחת מנוסחאות Γ. להלן דוגמא לכך.

אנו יודעים ש

$$\mathrm{x} = \mathrm{y} \vdash \mathrm{x} = \mathrm{y}$$

אם נפעיל את העקרון המוטעה, נקבל

$$\mathrm{x} = \mathrm{y} \vdash \forall \mathrm{y}(\mathrm{x} = \mathrm{y})$$

ממשפט הדדוקציה,

$$\vdash x = y \to \forall y(x = y)$$

ומ 3.6,

(הכללה)	$\vdash \forall y(x = y \to \forall y(x = y))$
(קבוצה III)	$\vdash \forall y(x = y \to \forall y(x = y)) \to (x = x \to \forall y(x = y))$
(MP)	$\vdash x = x \to \forall y(x = y))$
(קבוצה V)	$\vdash x = x$
(MP)	$\vdash \forall y(x = y)$

לכן (שוב מ 3.6), $\vdash \forall x \forall y(x = y)$. **אבל זה סותר את** 1.6.

26.6 הערה. 3.6 מקביל לטיעון המוכר: "מההנחה על Γ, קיבלנו של x יש את התכונה φ. אבל x היה שרירותי, לכן לכל x יש את התכונה φ".

27.6 משפטון. יהיו φ ו ψ נוסחאות, x משתנה, ו τ עצם. אזי

1. אם $\mathrm{allow}(\varphi, \tau, x)$, וכן
$$\Gamma \vdash \psi(x/\tau) \to \varphi$$
אזי
$$\Gamma \vdash \forall x \psi \to \varphi$$

2. אם x אינו חופשי ב ψ ואינו חופשי באף נוסחה של Γ, ובנוסף
$$\Gamma \vdash \psi \to \varphi$$
אזי
$$\Gamma \vdash \psi \to \forall x \varphi$$

הוכחת (1):

(מההנחה)	$1\ \Gamma \vdash \psi(x/\tau) \to \varphi$
(אקסיומת החלפה)	$2\ \Gamma \vdash \forall x\, \psi \to \psi(x/\tau)$
(טאוטולוגיה)	$3\ \Gamma \vdash (\forall x\, \psi \to \psi(x/\tau)) \to \to [(\psi(x/\tau) \to \varphi) \to (\forall x\, \psi \to \varphi)]$
(MP של 2, 3)	$4\ \Gamma \vdash (\psi(x/\tau) \to \varphi) \to (\forall x\, \psi \to \varphi)$
(MP של 1, 4)	$5\ \Gamma \vdash \forall x\, \psi \to \varphi$

הוכחת (2):

(מההנחה)	$1\ \Gamma \cup \{\psi\} \vdash \psi \to \varphi$
(אקסיומה לא־לוגית)	$2\ \Gamma \cup \{\psi\} \vdash \psi$
(MP)	$3\ \Gamma \cup \{\psi\} \vdash \varphi$
(משפט ההכללה)	$4\ \Gamma \cup \{\psi\} \vdash \forall x\, \psi$
(משפט הדדוקציה)	$5\ \Gamma \vdash \psi \to \forall x\, \psi$

28.6 משפטון. יהיו φ ו ψ נוסחאות, x משתנה, ו τ עצם. אזי

1. אם $\mathrm{allow}(\varphi,\tau,\mathrm{x})$, וכן
$$\Gamma\vdash\varphi\to\psi(\mathrm{x}/\tau)$$
אזי
$$\Gamma\vdash\varphi\to\exists\mathrm{x}\psi$$

2. אם x אינו חופשי ב ψ, ו x אינו חופשי באף נוסחה מ Γ, וכן
$$\Gamma\vdash\varphi\to\psi$$
אזי
$$\Gamma\vdash\exists\mathrm{x}\varphi\to\psi$$

הוכחת (1): מיידי (בהשתמש בסיבתיות טאוטולוגית) מאקסיומת ההחלפה
$$\vdash\forall\mathrm{x}\neg\psi\to(\neg\psi)(\mathrm{x}/\tau)$$

הוכחת (2): $\Gamma\vdash\varphi\to\psi$ שקולה טאוטולוגית ל $\Gamma\vdash\neg\psi\to\neg\varphi$. לכן מהמשפטון הקודם,
$$\Gamma\vdash\neg\psi\to\forall\mathrm{x}\neg\varphi$$
ושוב מסיבתיות טאוטולוגית, נקבל $\Gamma\vdash\exists\mathrm{x}\varphi\to\psi$.

29.6 דוגמא. נוכיח את הנוסחה
$$\vdash\exists\mathrm{x}\forall\mathrm{y}\varphi\to\forall\mathrm{y}\exists\mathrm{x}\varphi$$
(כאשר x ו y משתנים שונים).

הוכחה.

(טאוטולוגיה)	$\vdash\varphi\to\varphi$
(לפי $28.6(1)$, שכן תמיד מותר להחליף את x ב x)	$\vdash\varphi\to\exists x\varphi$
(לפי $27.6(1)$, שכן תמיד מותר להחליף את y ב y)	$\vdash\forall y\varphi\to\exists x\varphi$
(לפי $27.6(2)$, שכן y אינו חופשי ב $\forall\mathrm{y}\varphi$)	$\vdash\forall y\varphi\to\forall y\exists x\varphi$
(לפי $28.6(2)$, שכן x אינו חופשי ב $\forall\mathrm{y}\exists x\varphi$.)	$\vdash\exists x\forall y\varphi\to\forall y\exists x\varphi$

$\square$

30.6 הגדרה. נכתוב $\varphi\dashv\vdash\psi$ ("φ שקולה ל ψ") אם $\vdash\varphi\leftrightarrow\psi$.

בהמשך נראה ש $\psi\dashv\vdash\varphi$ אם ורק אם φ ו ψ שקולות אלמנטארית.

31.6 הערה. $\varphi\dashv\vdash\psi$ אם ורק אם $\psi\vdash\varphi$ וכן $\varphi\vdash\psi$.

הוכחה. תרגיל. □

32.6 עובדה.

1. $\dashv\vdash$ הוא יחס שקילות.
2. אם $\varphi \dashv\vdash \psi$, אזי $\neg\varphi \dashv\vdash \neg\psi$, $\forall x\varphi \dashv\vdash \forall x\psi$ וכן $\exists x\varphi \dashv\vdash \exists x\psi$. כמו כן, אם $\varphi_1 \dashv\vdash \psi_1$ וכן $\varphi_2 \dashv\vdash \psi_2$, אזי $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \dashv\vdash \psi_1 \wedge \psi_2$, $\varphi_1 \vee \varphi_2 \dashv\vdash \psi_1 \vee \psi_2$, וכן עבור שאר הקשרים.
3. יהיו x ו y משתנים, כך ש y אינו חופשי ב φ, וכן $\mathrm{allow}(\varphi, y, x)$. אזי

$$\vdash \forall x\varphi \to \forall y\varphi(x/y)$$

הוכחה. נניח ש $\varphi \dashv\vdash \psi$. אזי $\vdash \varphi \to \psi$. לפי 3.6, $\vdash \forall x(\varphi \to \psi)$, ובהשתמש באקסיומה מקבוצה II וב MP, נקבל $\vdash \forall x\varphi \to \forall x\psi$. באופן דומה נקבל $\vdash \forall x\psi \to \forall x\varphi$, ובעזרת MP ואקסיומה טאוטולוגית, נקבל $\forall x\varphi \dashv\vdash \forall x\psi$. אנו משאירים את המשך (1) ואת (2) לקורא.

הוכחת (3):

$\forall x\varphi \vdash \varphi(x/y)$	(קבוצה III+MP)
$\forall x\varphi \vdash \forall y\varphi(x/y)$	(לפי משפט 3.6)
$\vdash \forall x\varphi \to \forall y\varphi(x/y)$	(לפי משפט 2.6)

□

ההוכחה האחרונה היא הוכחה מתמטית, ולא גזירה פורמאלית כפי שהוגדר ב 13.6, אולם בהשתמש במשפטים 3.6 ו 2.6, ניתן לתרגם את ההוכחה לגזירה פורמאלית.

תרגילים

אקסיומות

1.6 תרגיל. לכל אחת מהנוסחאות הבאות, קבע האם היא אקסיומה או לא. הסבר את קביעתך.

1. $((\forall x P(x) \to \forall y P(y)) \to P(z)) \to (\forall x P(x) \to (\forall y P(y) \to P(z)))$.
2. $\forall y(\forall x(P(x) \to P(x)) \to (P(z) \to P(z)))$.
3. $\forall x \exists y P(x, y) \to \exists y P(y, y)$.
4. $\forall x(\forall y P(x, y) \to \forall y P(x, y))$.
5. $\forall x(\forall y P(x, y) \to \forall z P(x, z))$.

הוכחות פורמאליות

2.6 תרגיל. תן הוכחה פורמאלית מלאה של כל אחת מהנוסחאות הבאות.

1. $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \forall x\psi)$
כאשר x אינו חופשי ב φ.
2. $\varphi(t) \to \exists x\varphi(x)$
כאשר מותר להחליף את t ב x בנוסחה φ.
3. $\forall x\varphi \to \exists x\varphi$.
4. $\forall x(\varphi \land \psi) \leftrightarrow (\forall x\varphi \land \forall x\psi)$.

3.6 תרגיל. אילו מהטענות הבאות נכונות לכל φ, ψ ? הסבר!

1. אם $\vdash \varphi \land \psi$, אזי $\vdash \varphi$ וכן $\vdash \psi$.
2. אם $\vdash \varphi \lor \psi$, אזי $\vdash \varphi$ או $\vdash \psi$.
3. אם $\vdash \varphi$ וכן $\vdash \psi$, אזי $\vdash \varphi \land \psi$.
4. אם $\vdash \varphi$ או $\vdash \psi$, אזי $\vdash \varphi \lor \psi$.

4.6 תרגיל. הוכח או הפרך (מותר לך להשתמש במשפט ההכללה, במשפט הדדוקציה, וכולי):

1. $\vdash \exists x(\varphi \to \forall x\varphi)$.
2. $\vdash (\forall x\varphi \lor \forall x\psi) \to \forall x(\varphi \lor \psi)$.
3. $\vdash (\exists x\varphi \land \exists x\psi) \to \exists x(\varphi \land \psi)$.
4. $\{\varphi(x), \forall y(\varphi(y) \to \forall z\psi(z))\} \vdash \forall x\psi(x)$.
5. $\vdash \exists x\forall y\varphi \to \forall y\exists x\varphi$.

5.6 תרגיל. נניח ש $\Gamma \vdash \varphi$, ויהי P סמל יחס שאינו מופיע ב Γ או ב φ. האם יש הוכחה של φ מ Γ, שבה P אינו מופיע? האם יש הוכחה של φ מ Γ, שמכילה רק סמלי יחסים שמופיעים הן ב φ והן ב Γ? הוכח את תשובתך.

6.6 תרגיל. הוכח את 2.6 באינדוקציה על המבנה האינדוקטיבי שהוגדר ב 12.6.

7.6 תרגיל. הוכח את 23.6(1): Γ אינה עקבית אם ורק אם יש φ כך ש $\Gamma \vdash \varphi \land \neg\varphi$.

8.6 תרגיל. הוכח את 31.6: $\psi \dashv\vdash \varphi$ אם ורק אם $\varphi \vdash \psi$ וכן $\psi \vdash \varphi$.

פרק 7

שלמות

1.7 הגדרה. תאוריה Γ היא קבוצה של משפטים (נוסחאות סגורות) בשפה מסדר ראשון $\mathcal{L}$. לעיתים קרובות איננו נותנים שם לשפה שבה אנו משתמשים, ופשוט קוראים לה $\mathcal{L}(\Gamma)$. סימון זה נוח כאשר אנו משוים שתי תאוריות המנוסחות בשפות שונות.

הכוונה היא, שהנוסחאות מ Γ נכונות במודלים מסויימים אותם אנו רוצים לחקור. למשל, אם ברצוננו לחקור חבורות, נוכל לבחור את האקסיומות של החבורות להיות התאוריה שלנו.

2.7 הגדרה. תהי Γ תאוריה. תאוריה Γ' היא הרחבה של Γ אם $\mathcal{L}(\Gamma) \subseteq \mathcal{L}(\Gamma')$, וכן לכל נוסחה $\varphi \in \mathcal{L}(\Gamma)$ כך ש $\Gamma \vdash \varphi$, מתקיים $\Gamma' \vdash \varphi$. אם בנוסף $\mathcal{L}(\Gamma') = \mathcal{L}(\Gamma)$, נאמר ש Γ' הרחבה פשוטה של Γ. אם Γ' הרחבה של Γ, נאמר גם ש Γ תת־תאוריה של Γ', ונכתוב $\Gamma \subseteq \Gamma'$.

3.7 משפטון. תהי Γ' הרחבה של Γ. אם Γ' עקבית, אז Γ עקבית.

1.7 משפט (משפט הקומפקטיות עבור לוגיקה מסדר ראשון)**.** תהי Γ תאוריה. אזי Γ עקבית אם ורק אם כל תת־תאוריה סופית של Γ עקבית.

הוכחה. $(\Rightarrow)$ נניח בשלילה שקיימת תת־תאוריה $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ ונוסחה φ כך ש $\Gamma_0 \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$. אזי מהגדרה 2.7, $\Gamma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$. סתירה.

$(\Leftarrow)$ נניח ש Γ אינה עקבית. תהי φ נוסחה כך ש $\Gamma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$. לפי משפט 16.6 יש תת קבוצה סופית של Γ, נסמנה Γ_0, כך ש $\Gamma_0 \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$. סתירה. $\square$

4.7 הערה. הוכחה זאת היתה פשוטה בהרבה מהוכחת 1.3. הסיבה לכך היא, שהמושג "עקביות" שהגדרנו עבור תאוריות מסדר ראשון הוא מושג תחבירי (מוגדר בהשתמש הנוסחאות עצמן), בעוד שהמושג "ניתנות לסיפוק" עבור לוגיקה פסוקית הוא מושג סמאנטי (מתייחס לערכי אמת של הפסוקים). כדי להראות שתאוריה מסדר ראשון אינה עקבית, כל שעלינו לעשות הוא למצוא גזירה של סתירה (או תת קבוצה סופית שמוכיחה סתירה), וזהו מושג תחבירי. כדי להראות שתאוריה פסוקית אינה ניתנת לסיפוק, עלינו לבדוק את כל השמות האמת האפשריות.

בכל אופן, נראה בהמשך שהעקביות של תאוריה מסדר ראשון שקולה לתכונה סמאנטית, דהיינו התכונה שיש לתאוריה מודל.

5.7 הגדרה. תאוריה עקבית מסדר ראשון Γ היא שלמה, אם לכל נוסחה סגורה φ מ $\mathcal{L}(\Gamma)$, $\Gamma \vdash \varphi$ או $\Gamma \vdash \neg\varphi$ (שים לב שהעקביות של Γ מונעת את האפשרות ש $\Gamma \vdash \varphi$ וגם $\Gamma \vdash \neg\varphi$).

אם Γ אינה עקבית, אזי לכל נוסחה φ, $\Gamma \vdash \varphi$ וכן $\Gamma \vdash \neg\varphi$. לכן תאוריות שאינן עקביות יכלו להיקרא שלמות. ברם, היות שתאוריות לא עקביות אינן מעניינות, אנו כוללים את דרישת העקביות בהגדרת השלמות.

שים לב, שלא כל תאוריה עקבית היא שלמה. נראה בפרק הבא, שאקסיומות פאנו עבור תורת המספרים מהווים תאוריה שאינה שלמה. כמו כן יש לנו את הדוגמא הבאה.

6.7 דוגמא. תורת החבורות אינה שלמה.

פורמאלית, חבורה $\mathcal{G} = \langle G, +, 0\rangle$ נתונה על ידי קבוצה G, פעולה בינארית $+^{\mathcal{G}} : G \times G \to G$, ואיבר מיוחד $0^{\mathcal{G}}$, שמקיים את התנאים הבאים:

1. $+^{\mathcal{G}}$ אסוציאטיבית.
2. לכל $g \in G$, $g+^{\mathcal{G}}0^{\mathcal{G}} = 0^{\mathcal{G}}+^{\mathcal{G}}g = g$.
3. לכל $a \in G$ יש $b \in G$ כך ש $a+^{\mathcal{G}}b = 0^{\mathcal{G}}$.

לכן כל חבורה $\langle G, +, 0\rangle$ היא מודל של התאוריה GROUPS, שהאקסיומות הלא־לוגיות שלה הן

1. $\forall x\forall y\forall z((x + y) + z = x + (y + z))$.
2. $\forall x(x + 0 = x \wedge 0 + x = x)$.
3. $\forall x\exists y(x + y = 0 \wedge y + x = 0)$.

7.7 טענה. התאוריה *GROUPS* אינה שלמה.

הוכחה. תהי φ הנוסחה $\forall x\forall y(x+y = y+x)$. אזי $\mathrm{GROUPS} \nvdash \varphi$ וכן $\mathrm{GROUPS} \nvdash \neg\varphi$. מדוע? ובכן, נניח ש $\mathrm{GROUPS} \vdash \neg\varphi$. אזי, ממשפט הנכונות, $\mathrm{GROUPS} \models \neg\varphi$. אולם $\langle\mathbb{Z}, +\rangle$, חבורת השלמים עם חיבור, היא מודל של GROUPS. לכן, בהכרח היא מקיימת את הנוסחה הסגורה $\neg\varphi$, כלומר אינה מקיימת את φ. אבל לכל שני שלמים m ו n, $m + n = n + m$. לכן φ נכונה ב $\langle\mathbb{Z}, +\rangle$. סתירה.

באופן דומה, $\mathcal{S}_3$, חבורת התמורות של שלשה איברים, מכילה שני איברים x ו y, כך ש $x + y \neq y + x$ (כאן הפעולה $+$ היא הרכבה של תמורות). לכן, אם $\mathrm{GROUPS} \vdash \varphi$, אזי $\mathrm{GROUPS} \models \varphi$, ולכן φ בהכרח נכונה ב $\mathcal{S}_3$. אבל φ אינה נכונה ב $\mathcal{S}_3$. סתירה. $\square$

לסיכום, הראנו שלא ניתן להוכיח את החוק הקומוטטיבי מתוך האקסיומות של תורת החבורות. עשינו זאת בעזרת מציאת מודל של תורת החבורות, שבו לא התקיים החוק הקומוטטיבי. הראינו גם ששלילת החוק הקומוטטיבי אינה ניתנת להוכחה מתוך האקסיומות של תורת החבורות, היות שיש מודל של תורת החבורות שמקיים את החוק הקומוטטיבי.

8.7 משפטון. *תהי $\mathcal{L}$ שפה מסדר ראשון. אזי $\mathcal{L}$ בת מניה.*

הוכחה. כמו הוכחת 8.3. $\square$

כעת אנו מוכנים להוכחת התוצאה הראשונה מבין שתי התוצאות העיקריות של פרק זה.

9.7 משפט. *לכל תאוריה עקבית יש הרחבה פשוטה שלמה.*

הוכחה. תהי Γ תאוריה עקבית. לפי המשפטון הקודם, קבוצת הנוסחאות הסגורות מ $\mathcal{L}(\Gamma)$ בת מניה. תהי $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ מניה של קבוצה זאת. נבנה תאוריה שלמה Γ^* מ Γ באינדוקציה.

שלב ראשון: $\Gamma_0 = \Gamma$.

שלב שני: בהינתן $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$, נגדיר את Γ_{n+1}. אם $\Gamma_n \cup \{\varphi_n\}$ עקבית, תהי $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\varphi_n\}$, אחרת, $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n$.

שלב שלישי: תהי $\Gamma^* = \bigcup\{\Gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$.

קיבלנו סדרה

$$\Gamma = \Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \cdots \subset \Gamma_n \subset \cdots \subset \Gamma^*$$

נראה ש Γ^* עקבית ושלמה.

ראשית, נראה שכל Γ_n עקבית. לשם כך, מספיק להראות שלכל n,

אם Γ_n עקבית, אזי Γ_{n+1} עקבית.

הטענה ברורה כאשר $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n$. במקרה $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\varphi_n\}$, התאוריה עקבית מהבניה.

כדי לראות ש Γ^* עקבית, תהי Γ' תת־תאוריה סופית של Γ^*. אזי, יש $n \in \mathbb{N}$ כך ש $\Gamma' \subseteq \Gamma_n$ (אחרת, Γ' לא היתה סופית). Γ_n עקבית, לכן תת־התאוריה שלה, Γ', עקבית. לכן כל תת־תאוריה סופית של Γ^* היא עקבית. ממשפט הקומפקטיות עבור לוגיקה מסדר ראשון, Γ^* עקבית.

כדי לראות ש Γ^* שלמה, תהי φ נוסחה סגורה מ $\mathcal{L}(\Gamma)$. אזי φ היא φ_n, לאיזשהו $n \in \mathbb{N}$. אם $\varphi_n \in \Gamma^*$, אזי $\Gamma^* \vdash \varphi_n$. אם $\varphi_n \notin \Gamma^*$, זה משום ש $\Gamma_n \cup \{\varphi_n\}$ אינה עקבית. לכן, $\Gamma_n \vdash \neg\varphi_n$. לכן $\Gamma^* \vdash \neg\varphi_n$. $\square$

10.7 הגדרה. תהי Γ תאוריה. נגדיר את הסגור הדדוקטיבי של Γ להיות

$$cl_\vdash(\Gamma) := \{\varphi : \Gamma \vdash \varphi \text{ ו } \varphi \text{ סגורה}\}$$

אם $\Gamma_0 \subseteq \Gamma \subseteq cl_\vdash(\Gamma_0)$, נאמר ש Γ_0 היא אוסף אקסיומות עבור Γ.

11.7 משפטון. *יהיו Γ ו Γ' תאוריות.*

1. $\Gamma \subseteq cl_\vdash(\Gamma)$.
2. $cl_\vdash(cl_\vdash(\Gamma)) = cl_\vdash(\Gamma)$.
3. אם $\Gamma \subseteq \Gamma'$, אזי $cl_\vdash(\Gamma) \subseteq cl_\vdash(\Gamma')$.

הוכחה. תרגיל. □

12.7 הגדרה. Γ_1 ו Γ_2 תאוריות שקולות, אם $cl_{\vdash}(\Gamma_1) = cl_{\vdash}(\Gamma_2)$, כלומר ניתן להוכיח בדיוק את אותם משפטים בשתי התאוריות.

13.7 הערה. לעיתים קרובות איננו מבחינים בין תאוריות שקולות. למשל, כל תאוריה Γ המקיימת $cl_{\vdash}(\Gamma) = cl_{\vdash}(\mathrm{GROUPS})$ תיקרא "תורת החבורות".

את שאר הפרק נקדיש להוכחת המשפט הבא:

2.7 משפט (משפט השלמות). תאוריה Γ היא עקבית אם ורק אם יש לה מודל.

הכיוון $\Rightarrow$ מיידי. נניח שלתאוריה Γ יש מודל $\mathcal{M}$. נניח בשלילה ש Γ אינה עקבית, ותהי φ נוסחה סגורה מ $\mathcal{L}(\Gamma)$ כך ש $\Gamma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$. ממשפט הנכונות, $\mathcal{M} \models \varphi \wedge \neg\varphi$. לכן ($\varphi$,$\neg\varphi$ נוסחאות סגורות) $\mathcal{M} \models \varphi$ וכן $\mathcal{M} \models \neg\varphi$. בסתירה להגדרת $\models$.

לכן, Γ עקבית.

לפני שנוכיח את הכיוון $\Leftarrow$, נציג טענה שקולה למשפט השלמות:

$(*)$ תהי φ נוסחה. $\Gamma \vdash \varphi$ אם ורק אם $\Gamma \models \varphi$.

כדי לראות ש 2.7 גורר את $(*)$, שים לב שהטענה "אם $\Gamma \vdash \varphi$ אזי $\Gamma \models \varphi$" היא פשוט משפט הנכונות. כעת, אם $\Gamma \models \varphi$, אז φ נכונה בכל מודל של Γ. לכן, ל $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ אין מודל. לפי 2.7, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ אינה עקבית. לכן $\Gamma \vdash \varphi$.

כדי לראות ש $(*)$ גורר את 2.7, שים לב של Γ אין מודל אם ורק אם $\Gamma \models \varphi \wedge \neg\varphi$ לכל φ: $\Gamma \models \varphi$ פירושו שכל מודל של Γ מקיים את φ, או באופן שקול, אין מודל של Γ שאינו מקיים את φ. היות שאין מודלים של Γ כלל, הטענה נכונה. טיעון דומה מראה ש $\Gamma \models \neg\varphi$.

לפי $(*)$, $\Gamma \models \varphi \wedge \neg\varphi$ גורר ש $\Gamma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$. לכן Γ אינה עקבית. ולהיפך, אם Γ אינה עקבית, ל Γ אין מודל, ולכן אנו מקבלים את 2.7 מ $(*)$.

לכן, 2.7 ו $(*)$ שקולים.

הטענה השקולה $(*)$ מסבירה לנו מדוע נקרא משפט זה "משפט השלמות". $(*)$ אומר, שמערכת ההוכחה הלוגית שהגדרנו בפרק הקודם היא שלמה במובן זה, שהיא מוכיחה כל מה שהיינו מצפים שתוכיח, כלומר כל מה שמוסכם על כל המודלים של התאוריה Γ, ניתן להוכיחו מ Γ. במלים אחרות, מערכת ההוכחה תופסת את כל הקונצנזוס הלוגי. אם לא ניתן להוכיח מ Γ משפט מסויים, הרי זה משום שיש מודל של Γ שאינו מקיים משפט זה.

אין זה פשוט כלל ועיקר להוכיח שלתאוריה עקבית יש מודל (מבלי להשתמש ב $(*)$, כמובן). עלינו לבנות מודל עבור Γ, אולם במה נשתמש עבור העולם? כל שיש לנו הוא תאוריה Γ ושפה $\mathcal{L}(\Gamma)$. הפתרון הוא לבנות את העולם מתוך השפה. ליתר דיוק, העולם ייבנה מהעצמים הסגורים של $\mathcal{L}(\Gamma)$. נגדיר יחס על קבוצת העצמים הסגורים: שני עצמים יתיחסו זה לזה אם ורק אם התאוריה Γ מוכיחה שהם שוים. נראה שיחס זה הוא יחס שקילות, וניקח את קבוצת מחלקות השקילות להיות העולם.

העצמים הסגורים של שפה מכילים את הקבועים ואת ואת סמלי הפונקציות מופעלות על הקבועים. מתעוררת הבעיה הבאה: מה נעשה אם אין ב $\mathcal{L}(\Gamma)$ קבועים? הפתרון יהיה להוסיף קבוצה C של קבועים ל $\mathcal{L}$, לקבל שפה $\mathcal{L}'$. כדי לטפל בכך, אנו זקוקים למספר תוצאות בנוגע לקבועים.

14.7 עובדה. יהיו φ_1 ו φ_2 נוסחאות שלא מופיעים בהן הקבועים $\mathrm{c}_0,\dots,\mathrm{c}_n$. אם

$$\varphi_1(\mathrm{x}_0/\mathrm{c}_0,\dots,\mathrm{x}_n/\mathrm{c}_n)=\varphi_2(\mathrm{x}_0/\mathrm{c}_0,\dots,\mathrm{x}_n/\mathrm{c}_n),$$

אז $\varphi_1=\varphi_2$.

הוכחה. תרגיל קל. □

בהוכחות לא פורמאליות במתמטיקה, אנו משתמשים לעיתים קרובות בטענות כגון "נקבע מספר טבעי n", או "יהי n מספר טבעי שרירותי (אך קבוע)". בהוכחה פורמאלית, טיעון זה מקביל להוספת סמל קבוע n לשפה. כל מה שנוכיח על n יהיה נכון לגבי כל מספר טבעי, שכן n היה שרירותי. טיעון זה מוצדק על ידי המשפט הבא:

3.7 משפט (משפט על קבועים)**.** תהי Γ תאוריה, ותהי $\mathcal{L}=\mathcal{L}(\Gamma)$. תהי $C=\{\mathrm{c}_0,\mathrm{c}_1,\dots\}$ קבוצה של סמלי קבועים שאינם מופיעים ב $\mathcal{L}$. תהי Γ' התאוריה עם אותן אקסיומות לא־לוגיות כמו Γ, אך עם השפה $\mathcal{L}'$, שהיא השפה $\mathcal{L}$ מועשרת על ידי הקבועים מ C (ולכן $\mathcal{L}'$ גם מכילה עצמים ונוסחאות שניתן לבנות בהשתמש בקבועים החדשים). אזי, לכל $\varphi\in\mathcal{L}$: $\Gamma\vdash\varphi$ אם ורק אם $\Gamma'\vdash\varphi(\mathrm{x}_0/\mathrm{c}_0,\dots,\mathrm{x}_k/\mathrm{c}_k)$.

הוכחה. ($\Rightarrow$) זה הכיוון הקל. היות ש $\Gamma\vdash\varphi$, $\Gamma'\vdash\varphi$.
ממשפט ההכללה,

$$\Gamma'\vdash\forall\mathrm{x}_0\,\varphi$$

בעזרת אקסיומת החלפה ומודוס פוננס נקבל

$$\Gamma'\vdash\varphi(\mathrm{x}_0/\mathrm{c}_0)$$

על ידי הפעלה חוזרת (n פעמים נוספות) של שני השלבים הקודמים נקבל

$$\Gamma'\vdash\varphi(\mathrm{x}_0/\mathrm{c}_0,\dots,\mathrm{x}_n/\mathrm{c}_n)$$

($\Leftarrow$) תהי $\varphi\in\mathcal{L}$, ונניח ש $\Gamma'\vdash\varphi(x_0/c_0,\dots,x_k/c_k)$.
באינדוקציה על ההוכחה של הנוסחה $\varphi(\mathrm{x}_0/\mathrm{c}_0,\dots,\mathrm{x}_k/\mathrm{c}_k)$ מ Γ', נראה ש $\Gamma\vdash\varphi$.
מקרה 1: $\varphi(\mathrm{x}_0/\mathrm{c}_0,\dots,\mathrm{x}_k/\mathrm{c}_k)$ אקסיומה.
אם $\varphi(\mathrm{x}_0/\mathrm{c}_0,\dots,\mathrm{x}_k/\mathrm{c}_k)$ אקסיומה לא־לוגית של Γ', $\Gamma\vdash\varphi$, שכן Γ ול Γ' אותן אקסיומות לא־לוגיות.
אם $\varphi(\mathrm{x}_0/\mathrm{c}_0,\dots,\mathrm{x}_k/\mathrm{c}_k)$ טאוטולוגיה, גם φ טאוטולוגיה, לכן $\Gamma\vdash\varphi$.
כעת נניח ש $\varphi(\mathrm{x}_0/\mathrm{c}_0,\dots,\mathrm{x}_k/\mathrm{c}_k)$ אקסיומת הכללה, כלומר מהצורה $\psi\rightarrow\forall\mathrm{y}\psi$.
אזי φ היתה מהצורה $\psi_1\rightarrow\forall\mathrm{y}\psi_2$, כאשר $\psi=\psi_1(\mathrm{x}_0/\mathrm{c}_0,\dots,\mathrm{x}_k/\mathrm{c}_k)$ ו $\forall\mathrm{y}\psi=(\forall\mathrm{y}\psi_2)(\mathrm{x}_0/\mathrm{c}_0,\dots,\mathrm{x}_k/\mathrm{c}_k)$.
אפשר להניח ש y שונה מכל ה x_i־ים (אחרת, y שוה לאחד מהם, נניח x_j. לכן c_j אינו מופיע ב $\forall\mathrm{y}\psi$, שכן y לא הוחלף, ולכן אינו מופיע ב ψ. לכן x_j אינו מופיע חופשי ב φ_1, ולכן $\psi\rightarrow\forall\mathrm{y}\psi$ היא $\varphi(\mathrm{x}_1/\mathrm{c}_1,\dots,\mathrm{x}_k/\mathrm{c}_k)$.)

כעת נחקור את היחס בין ψ_1 ו ψ_2. ψ_1 בהכרח שוה ש $\psi(\mathrm{c}_0/\mathrm{x}_0,\ldots,\mathrm{c}_k/\mathrm{x}_k)$, שכן y שונה מכל ה x_i־ם. לכן, $\psi_2=\psi(\mathrm{c}_0/\mathrm{x}_0,\ldots,\mathrm{c}_k/\mathrm{x}_k)$. מכאן ש φ היתה אף היא מהצורה $\forall\mathrm{y}\psi_1\to\psi_1$, כאשר y אינו חופשי ב φ_1, כלומר אקסיומה.

בכך טיפלנו בצורה הטהורה של האקסיומה. נשאיר את המקרה הכללי של אקסיומת הכללה, כמו את הקבוצות האחרות, עבור הקורא.

מקרה 2: $\varphi(\mathrm{x}_0/\mathrm{c}_0,\ldots,\mathrm{x}_k/\mathrm{c}_k)$ נגזרה מהנוסחאות

$$\begin{aligned}&\psi(\mathrm{x}_0/\mathrm{c}_0,\ldots,\mathrm{x}_k/\mathrm{c}_k)\\&\psi(\mathrm{x}_0/\mathrm{c}_0,\ldots,\mathrm{x}_k/\mathrm{c}_k)\quad\to\varphi(\mathrm{x}_0/\mathrm{c}_0,\ldots,\mathrm{x}_k/\mathrm{c}_k)\end{aligned}$$

על ידי מודוס פוננס. מהנחת האינדוקציה, $\Gamma\vdash\psi\to\varphi$ וכן $\Gamma\vdash\psi$. לכן, בעזרת מודוס פוננס, נקבל $\Gamma\vdash\varphi$. □

מדוע אנו מעוניינים להוסיף קבועים לשפה? נניח שאנו עובדים עם תאוריה עקבית Γ שמוכיחה $\exists\mathrm{x}\varphi$, אך אין סמל קבוע c ב $\mathcal{L}(\Gamma)$ כך ש $\Gamma\vdash\varphi(\mathrm{x}/\mathrm{c})$. במקרה זה, נאמר של φ אין עד ב $\mathcal{L}$. כדי לפתור בעיה זאת, אנו יכולים להוסיף קבוע, c_φ, ל $\mathcal{L}$, ואקסיומה חדשה, $\exists\mathrm{x}\varphi\to\varphi(\mathrm{x}/\mathrm{c}_\varphi)$, ל Γ, שנקראת האקסיומה המיוחדת עבור c_φ. אזי ל φ יהיה עד ב $\mathcal{L}$. יתר על כן, התאוריה החדשה שלנו תהיה עקבית. לפני שנוכיח זאת, ניתן הגדרה ובניה.

15.7 הגדרה. תאוריה Γ היא תאורית הנקין אם לכל נוסחה סגורה מהצורה $\exists\mathrm{x}\theta\in\mathcal{L}(\Gamma)$, יש סמל קבוע c ב $\mathcal{L}(\Gamma)$ כך ש $\Gamma\vdash\exists\mathrm{x}\theta\to\theta(\mathrm{x}/\mathrm{c})$.

בהינתן תאוריה Γ, נראה כיצד לבנות הרחבה Γ_H של Γ כך ש Γ_H תאורית הנקין.

16.7 משפטון. *תהי Γ תאוריה עקבית בשפה $\mathcal{L}$. אזי יש שפה $\mathcal{L}'\supseteq\mathcal{L}$ (עם אותם סמלי פונקציה וסמלי יחס, אך עם קבועים חדשים) ותאוריה עקבית $\Gamma'\supseteq\Gamma$ כך ש:*

> *לכל נוסחה סגורה מהצורה $\exists\mathrm{y}\,\varphi$ בשפה $\mathcal{L}$ יש סמל קבוע $\mathrm{c}\in\mathcal{L}'$ כך שהנוסחה $\exists\mathrm{y}\,\varphi\to\varphi(y/c)$ שייכת ל Γ'.*

הוכחה. תהי $\{\varphi_0,\varphi_1,\ldots\}$ מניה של הנוסחאות הסגורות מ $\mathcal{L}$, שהם מהצורה $\exists\mathrm{x}\theta$. לכל מספר טבעי i יש נוסחה θ_i ומשתנה y_i כך ש $\varphi_i=\exists\mathrm{y}_i\,\theta_i$ (ייתכן שעבור $i\neq j$, $\mathrm{y}_i=\mathrm{y}_j$). לכל i, נוסיף סמל קבוע c_i ל $\mathcal{L}$, ואקסיומה $\exists\mathrm{y}_i\theta_i\to\theta_i(\mathrm{y}_i/\mathrm{c}_i)$ ל Γ. פורמאלית, תהי $\{\mathrm{c}_0,\mathrm{c}_1,\ldots\}$ קבוצה בת מניה של סמלי קבועים שונים זה מזה, שאינם מופיעים ב $\mathcal{L}$, ותהי

$$\Gamma'=\Gamma\cup\{\exists\mathrm{y}_i\theta_i\to\theta_i(\mathrm{y}_i/\mathrm{c}_i):i\in\mathbb{N}\}$$

עלינו להראות ש Γ' עקבית. נניח ש Γ' אינה עקבית. אזי יש תת־תאוריה סופית לא עקבית של Γ'. לכן, יש k כך ש

$$\Gamma\cup\{\exists\mathrm{y}_i\theta_i\to\theta_i(\mathrm{y}_i/\mathrm{c}_i):i<k\}$$

עקבית, אבל

$$\Gamma\cup\{\exists\mathrm{y}_i\theta_i\to\theta_i(\mathrm{y}_i/\mathrm{c}_i):i<k\}\cup\{\exists\mathrm{y}_k\theta_k\to\theta_k(\mathrm{c}_k)\}$$

אינה עקבית. תהי Γ^* התאוריה

$$\Gamma \cup \{\exists \mathrm{y}_i\theta_i \to \theta_i(\mathrm{y}_i/\mathrm{c}_i) : i < k\}$$

אזי $\Gamma^* \vdash \neg(\exists \mathrm{y}_k\theta_k \to \theta_k(\mathrm{c}_k))$. לכן $\Gamma^* \vdash \exists \mathrm{y}_k\theta_k \wedge \neg\theta_k(\mathrm{c}_k)$. לכן $\Gamma^* \vdash \exists \mathrm{y}_k\theta_k$. $\Gamma^* \vdash \neg\theta_k(\mathrm{c}_k)$, לכן מהמשפט על הקבועים וממשפט ההכללה, $\Gamma^* \vdash \forall \mathrm{x}\neg\theta_k(\mathrm{x})$. סתירה. לכן, Γ' עקבית. $\square$

לכל $\varphi_i \in \Gamma$ יש עד ב Γ', אבל תיתכן נוסחה $\varphi \in \mathcal{L}'$ שאין לה עד. לכן נחזור על התהליך.

17.7 משפט. תהי Γ תאוריה עקבית בשפה $\mathcal{L}$. אזי יש שפה $\mathcal{L}_H \supseteq \mathcal{L}$ ותאוריה עקבית $\Gamma_H \supseteq \Gamma$ בשפה $\mathcal{L}_H$ כך ש Γ_H תאורית הנקין.

הוכחה. יהיו $\Gamma_0 := \Gamma$, $\mathcal{L}_0 := \mathcal{L}$. לכל n, נבנה את Γ_{n+1} ואת $\mathcal{L}_{n+1}$ מ Γ_n ומ $\mathcal{L}_n$ כבמשפטון 16.7, כלומר $\Gamma_{n+1} := \Gamma'_n$. נגדיר את

$$\Gamma_H = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n$$

מהבניה, Γ_H תאורית הנקין, ו $\mathcal{L}(\Gamma_H)$ בת מניה. Γ_H תיקרא הנקיניזציה של Γ.

עלינו להראות ש Γ_H עקבית. אם Γ_H אינה עקבית, יש לה תת־תאוריה סופית שאינה עקבית. לכן לאיזשהו n, Γ_n אינה עקבית. אבל מהמשפטון הקודם (בהשתמש באינדוקציה על n), כל Γ_n עקבית. $\square$

האיסטרטגיה להוכחת משפט השלמות תהיה: בהינתן תאוריה עקבית Γ בשפה $\mathcal{L}$, נמצא תאורית הנקין עקבית ושלמה Γ' המרחיבה את Γ. לאחר מכן נבנה מודל $\mathcal{M}'$ עבור Γ'. Γ' היא תאוריה בשפה הגדולה יותר $\mathcal{L}'$, לכן $\mathcal{M}'$ אינו בדיוק מודל עבור Γ. על כל פנים, אנו "שוכחים" את הפירושים של סמלי הקבועים החדשים, ומקבלים מודל $\mathcal{M}$ עבור השפה המקורית $\mathcal{L}$, שיהיה מודל של Γ. הקשר שבין המודלים $\mathcal{M}$ ו $\mathcal{M}'$ מובא בהגדרה הבאה:

18.7 הגדרה. תהי $\mathcal{L}$ שפה מסדר ראשון, ותהי $\mathcal{L}'$ הרחבה של $\mathcal{L}$ (כלומר $\mathcal{L}$ היא תת שפה של $\mathcal{L}'$, ייתכן שעם פחות סמלי קבועים, יחסים ופונקציות). יהי $\mathcal{M}$ מודל עבור $\mathcal{L}$, ויהי $\mathcal{M}'$ מודל עבור $\mathcal{L}'$. נאמר ש $\mathcal{M}'$ הוא הרחבה של $\mathcal{M}$ אם

1. $M' = M$.
2. כל סמל יחס R ב $\mathcal{L}$ הוא גם סמל יחס ב $\mathcal{L}'$, ו $\mathrm{R}^{\mathcal{M}} = \mathrm{R}^{\mathcal{M}'}$.
3. כל סמל פונקציה F ב $\mathcal{L}$ הוא גם סמל פונקציה ב $\mathcal{L}'$, ו $\mathrm{F}^{\mathcal{M}} = \mathrm{F}^{\mathcal{M}'}$.
4. כל סמל קבוע c ב $\mathcal{L}$ הוא גם סמל קבוע ב $\mathcal{L}'$, ו $\mathrm{c}^{\mathcal{M}} = \mathrm{c}^{\mathcal{M}'}$.

אם $\mathcal{M}'$ הוא הרחבה של $\mathcal{M}$, נקרא ל $\mathcal{M}$ הצימצום של $\mathcal{M}'$ ל $\mathcal{L}$, ונכתוב זאת $\mathcal{M} = \mathcal{M}' \upharpoonright \mathcal{L}$.

19.7 דוגמא. $\mathcal{M} := (\mathbb{Z}, +, 0)$ הוא חבורה. $\mathcal{M}' := (\mathbb{Z}, +, \cdot, 0)$ הוא חוג. $\mathcal{M} = \mathcal{M}' \upharpoonright \mathcal{L}$, כאשר $\mathcal{L}$ היא השפה של תורת החבורות.

באופן כללי, כל חוג הוא הרחבה של החבורה החיבורית שלו.

20.7 משפטון (משפטון הצימצום). יהיו Γ ו Γ' תאוריות בשפות $\mathcal{L}$ ו $\mathcal{L}'$ בהתאמה, כך ש Γ' הרחבה של Γ ו $\mathcal{L}'$ הרחבה של $\mathcal{L}$. יהי $\mathcal{M}'$ מודל של Γ'. אזי $\mathcal{M}'\lceil\mathcal{L}$ מודל של Γ.

הוכחה. יהי $\mathcal{M} = \mathcal{M}'\lceil\mathcal{L}$. אזי:

1. לכל $\mathcal{M}$־עצם סגור τ (בשפה $\mathcal{L}$), $\tau^{\mathcal{M}} = \tau^{\mathcal{M}'}$.

2. לכל $\mathcal{M}$־נוסחה סגורה φ (בשפה $\mathcal{L}$), $\mathcal{M} \models \varphi$ אם ורק אם $\mathcal{M}' \models \varphi$.

3. $\mathcal{M} \models \Gamma$.

הוכחת (1) היא באינדוקציה על τ, בהשתמש בהנחה $18.7(4)$–(5).
הוכחת (2) היא באינדוקציה על φ. עבור נוסחאות אטומיות, אנו משתמשים ב $18.7(3)$. נשאיר את הפרטים לקורא. נציין רק שהעולמות M ו M' הם אותן קבוצות, לכן אין בעיות בשלב האינדוקציה $\varphi = \forall x \psi$.
הוכחת (3). כל נוסחה $\varphi \in \Gamma$ שייכת גם ל Γ'. לכן $\mathcal{M}' \models \varphi$, לכן מ (2), $\mathcal{M} \models \varphi$. $\square$

לפני שנתחיל את בניית המודל שלנו מסמלי הקבועים של השפה, נעיר מספר הערות כלליות לגבי יחסי שקילות:
יהיו A ו B קבוצות, ו $f : A \to B$ פונקציה. נגדיר את היחס $\sim_f$ על A כדלקמן:

$$a_1 \sim_f a_2 \quad \text{אם ורק אם} \quad f(a_1) = f(a_2)$$

קל לראות שהיחס $\sim_f$ הוא רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי, כלומר

1. לכל $a \in A$, $a \sim_f a$.

2. לכל $a_1, a_2 \in A$, אם $a_1 \sim_f a_2$ אז $a_2 \sim_f a_1$.

3. לכל $a_1, a_2, a_3 \in A$, אם $a_1 \sim_f a_2$ וכן $a_2 \sim_f a_3$, אז $a_1 \sim_f a_3$.

ולהיפך:

21.7 עובדה. אם $R \subseteq A \times A$ רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי (יחס כזה נקרא יחס שקילות), אזי יש קבוצה B ופונקציה $f : A \to B$ כך ש $(a_1, a_2) \in R$ אם ורק אם $f(a_1) = f(a_2)$.

הוכחה. תהי B קבוצת "מחלקות השקילות", כלומר לכל $a \in A$ נגדיר את מחלקת השקילות של a להיות הקבוצה

$$a/R := \{a' \in A : (a, a') \in R\}$$

הפונקציה $f(a) := a/R$ תקיים את הדרוש, כפי שהקורא יכול לודא בקלות. $\square$

כעת אנו מוכנים לבנית המודל מהקבועים. תהי Γ תאוריה עקבית. תהי Γ_H ההנקיניזציה של Γ. לפי משפט 17.7, Γ_H עקבית. לכן, לפי משפט 9.7, יש ל Γ_H הרחבה פשוטה Γ^*. Γ^* הרחבה פשוטה של Γ_H, לכן גם Γ^* תאורית הנקין. נראה של Γ^* יש מודל $\mathcal{M}^*$, וזה יספיק, שכן לפי משפטון הצימצום, $\mathcal{M}^*\lceil\mathcal{L}(\Gamma)$ יהיה מודל של Γ. לכן, לב ההוכחה הוא בניית המודל $\mathcal{M}^*$ של Γ^*.

כפי שהערנו בעבר, אנו בונים את העולם של $\mathcal{M}^*$ בעזרת העצמים הסגורים של $\mathcal{L}(\Gamma^*)$. נגדיר יחס $\sim$ על קבוצת העצמים הסגורים על ידי

$$\tau \sim \mu \text{ אם ורק אם } \Gamma^* \vdash \tau = \mu$$

קל לראות ש $\sim$ הוא יחס שקילות. מאקסיומות הזהות, $\Gamma^* \vdash \mathrm{x} = \mathrm{x}$, לכן בעזרת אקסיומת ההחלפה (ומודוס פוננס), $\Gamma^* \vdash \tau = \tau$. לכן $\tau \sim \tau$, לכן $\sim$ רפלקסיבי. נשאיר את הוכחת הסימטריות והטרנזיטיביות כתרגיל.

העולם, M^*, הוא הקבוצה של מחלקות השקילות תחת $\sim$. להשלמת ההגדרה של $\mathcal{M}^*$, עלינו להגדיר את $\mathrm{c}^{\mathcal{M}^*}$ לכל סמל קבוע ב $\mathcal{L}(\Gamma^*)$, את $F^{\mathcal{M}^*}$ לכל סמל פונקציה F ב $\mathcal{L}(\Gamma^*)$, ואת $R^{\mathcal{M}^*}$ לכל סמל יחס R.

לכל עצם סגור τ מ $\mathcal{L}(\Gamma^*)$, תהי $[\tau]$ מחלקת השקילות של τ.

יהי c סמל קבוע ב $\mathcal{L}(\Gamma^*)$, נגדיר

$$\mathrm{c}^{\mathcal{M}^*} = [\mathrm{c}]$$

יהי F סמל פונקציה n־מקומית. נגדיר

$$\mathrm{F}^{\mathcal{M}^*}([\tau_1] \cdots [\tau_n]) = [F\tau_1 \cdots \tau_n]$$

יהי R, סמל יחס n־מקומי. נגדיר

$$([\tau_1] \cdots [\tau_n]) \in \mathrm{R}^{\mathcal{M}^*} \text{ אם ורק אם } \Gamma^* \vdash R\tau_1 \cdots \tau_n$$

כדי להראות שהדברים מוגדרים היטב, יש להראות שאין תלות בבחירת הנציג ממחלקת השקילות. במלים אחרות, לכל $\tau \in [\mu]$, $[\mu] = [\tau]$. לכן היינו רוצים ש $\mathrm{F}^{\mathcal{M}^*}([\mu])$ יהיה שוה ל $\mathrm{F}^{\mathcal{M}^*}([\tau])$. ואכן, היות שהתאוריה מוכיחה ש τ ו μ שוים, זה מתקיים. פורמאלית, יהי F סמל פונקציה אונארית. נניח ש $[\mu] = [\tau]$. אזי $\mu \sim \tau$, כלומר $\Gamma^* \vdash \tau = \mu$. לכן, $\Gamma^* \vdash \mathrm{F}\tau = F\mu$, כלומר $\mathrm{F}\tau \sim F\mu$, לכן $[\mathrm{F}\mu] = [\mathrm{F}\tau]$. לכן, $\mathrm{F}^{\mathcal{M}^*}([\tau]) = \mathrm{F}^{\mathcal{M}^*}([\mu])$.

בדומה, לכל סמל יחס אונארי R, אם $[\mu] = [\tau]$, אז $\mu \sim \tau$, כלומר $\Gamma^* \vdash \tau = \mu$. לכן, $\Gamma^* \vdash R\tau \leftrightarrow R\mu$. לכן, "$\Gamma^* \vdash \mathrm{R}\mu$ אם ורק אם $\Gamma^* \vdash R\tau$", כלומר "$[\mu] \in \mathrm{R}^{\mathcal{M}^*}$ אם ורק אם $[\tau] \in \mathrm{R}^{\mathcal{M}^*}$".

בהשתמש באקסיומות השויון, הכללת ההוכחת למקרה ה n־מקומי מיידית.

אנו טוענים ש $\mathcal{M}^* \models \Gamma^*$. לפני שנוכיח זאת, אנו זקוקים לתוצאה נוספת, שמראה שלכל עצם סגור ב $\mathcal{L}(\Gamma^*)$ יש את הפירוש הדרוש ב $\mathcal{M}^*$.

22.7 משפטון. יהי τ עצם סגור ב $\mathcal{L}(\Gamma^*)$ אזי $\tau^{\mathcal{M}^*} = [\tau]$.

הוכחה. באינדוקציה על τ. היות ש τ עצם סגור, לא מופיעים בו משתנים. לכן הוא בהכרח סמל קבוע, או שהוא מהצורה $\mathrm{F}\tau_1 \cdots \tau_n$.

אם τ הוא סמל קבוע c, אזי מההגדרה, $\tau^{\mathcal{M}^*} = \mathrm{c}^{\mathcal{M}^*} = [\mathrm{c}] = [\tau]$. אחרת,

$$\begin{aligned}
\tau^{\mathcal{M}^*} &= (F\tau_1 \cdots \tau_n)^{\mathcal{M}^*} \\
&= \mathrm{F}^{\mathcal{M}^*}((\tau_1)^{\mathcal{M}^*} \cdots (\tau_n)^{\mathcal{M}^*}) && \text{(מהגדרת הפירוש)} \\
&= \mathrm{F}^{\mathcal{M}^*}([\tau_1] \cdots [\tau_n]) && \text{(מהנחת האינדוקציה)} \\
&= [F\tau_1 \cdots \tau_n] && \text{(מהגדרת } F^{\mathcal{M}^*}\text{)} \\
&= [\tau]
\end{aligned}$$

□

23.7 משפטון. תהי φ נוסחה סגורה מ $\mathcal{L}(\Gamma^*)$. אזי $\Gamma^* \vdash \varphi$ אם ורק אם $\mathcal{M}^* \models \varphi$

הוכחה. באינדוקציה על φ. אם φ אטומית, φ היא $R\tau_1 \cdots \tau_n$, או ש φ היא $\tau_1 = \tau_2$. לכן

$\Gamma^* \vdash \varphi$

אם ורק אם $\Gamma^* \vdash \mathrm{R}\tau_1 \cdots \tau_n$

אם ורק אם $([\tau_1] \cdots [\tau_n]) \in \mathrm{R}^{\mathcal{M}^*}$

אם ורק אם $((\tau_1)^{\mathcal{M}^*} \cdots (\tau_n)^{\mathcal{M}^*}) \in \mathrm{R}^{\mathcal{M}^*}$

אם ורק אם $\mathcal{M}^* \models \mathrm{R}(\tau_1, \ldots, \tau_n)$

אם ורק אם $\mathcal{M}^* \models \varphi$

או

$\Gamma^* \vdash \varphi$

אם ורק אם $\Gamma^* \vdash \tau = \mu$

אם ורק אם $\tau \sim \mu$

אם ורק אם $[\tau] = [\mu]$

אם ורק אם $\tau^{\mathcal{M}^*} = \mu^{\mathcal{M}^*}$

אם ורק אם $\mathcal{M}^* \models \tau = \mu$

אם ורק אם $\mathcal{M}^* \models \varphi$

בכך כיסינו את המקרה ש φ אטומית.
עבור המקרה שבו φ היא $(\neg\psi)$, עלינו להשתמש בשלמות של התאוריה שלנו.

$\Gamma^* \vdash \varphi$

אם ורק אם $\Gamma^* \vdash \neg\psi$

אם ורק אם $\Gamma^* \nvdash \psi$ (כי Γ^* שלמה !)

אם ורק אם $\mathcal{M}^* \not\models \psi$ (מהנחת האינדוקציה)

אם ורק אם $\mathcal{M}^* \models (\neg\psi)$

אם ורק אם $\mathcal{M}^* \models \varphi$

אם φ היא $\psi \wedge \chi$,

$\Gamma^* \vdash \varphi$

אם ורק אם $\Gamma^* \vdash \psi \wedge \chi$

אם ורק אם $\Gamma^* \vdash \psi$ וכן $\Gamma^* \vdash \chi$

אם ורק אם $\mathcal{M}^* \models \psi$ וכן $\mathcal{M}^* \models \chi$

אם ורק אם $\mathcal{M}^* \models \psi \wedge \chi$

אם ורק אם $\mathcal{M}^* \models \varphi$

לבסוף, עלינו לטפל במקרה $\varphi = \forall \mathrm{x}\psi$. כאן נשתמש בכך שהתאוריה שלנו היא תאורית הנקין. שים לב שלכל עצם סגור τ ב $\mathcal{L}(\Gamma^*)$, יש סמל קבוע c ב $\mathcal{L}^*$ כך ש $\Gamma^* \models \mathrm{c} = \tau$. ניתן למצוא קבוע זה על ידי הפעלת העובדה ש Γ^* היא תאורית הנקין לנוסחה $\exists \mathrm{x}\, \mathrm{x} = \tau$.
נניח ש $\Gamma \vdash \forall \mathrm{x}\psi$. אזי לכל $m \in \mathcal{M}^*$ יש עצם סגור τ כך ש $m = [\tau]$ היא מחלקת השקילות של τ.

$\Gamma \vdash \psi(x/\tau)$. לכן מהנחת האינדוקציה, $\mathcal{M}^* \models \psi(x/\tau)$. $\tau^{\mathcal{M}^*} = [\tau] = m$, לכן $\mathcal{M}^* \models \psi(x/m)$. הדבר נכון לכל m, לכן $\mathcal{M}^* \models \forall x\psi$.

עבור הכיוון ההפוך, נניח ש $\mathcal{M} \models \forall x\psi$. יהי c סמל קבוע כך שהנוסחה

$$\exists x\neg\psi \;\; \rightarrow \;\; \neg\psi(x/c)$$

שייכת ל Γ^*. אזי

$$\Gamma^* \vdash \psi(x/c) \rightarrow \neg\exists x \neg\psi$$

או באופן שקול,

$$\Gamma^* \vdash \psi(x/c) \rightarrow \forall x\, \psi \qquad (*).$$

$\mathcal{M}^* \models \forall x\, \psi$, לכן $\mathcal{M}^* \models \psi(x/c)$. מהנחת האינדוקציה, $\Gamma^* \vdash \psi(x/c)$, ומ $(*)$, $\Gamma \vdash \forall x\, \psi$.

כעת התוצאה המתבקשת.

24.7 תוצאה. $\mathcal{M}^*$ הוא מודל של Γ^*.

הוכחה. תהי φ אקסיומה לא־לוגית של Γ^*. $\Gamma^* \vdash \varphi$, לכן מהמשפט, $\mathcal{M}^* \models \varphi$. □

כפי שנאמר קודם, $\mathcal{M}^*\restriction\mathcal{L}(\Gamma)$ הוא מודל של Γ. בכך השלמנו את הוכחת משפט השלמות. □

תרגילים

משפטים לוגיים והסגור הדדוקטיבי

1.7 תרגיל. הוכח את משפטון 11.7: יהיו Γ ו Γ' תאוריות.

1. $\Gamma \subseteq cl_\vdash(\Gamma)$.
2. $cl_\vdash(cl_\vdash(\Gamma)) = cl_\vdash(\Gamma)$.
3. אם $\Gamma \subseteq \Gamma'$, אזי $cl_\vdash(\Gamma) \subseteq cl_\vdash(\Gamma')$.

2.7 תרגיל. שתי קבוצות עקביות של נוסחאות סגורות Σ_1 ו Σ_2 הן שקולות אם לכל נוסחה סגורה φ, אם $\varphi \in \Sigma_1$ אזי $\Sigma_2 \vdash \varphi$, ואם $\varphi \in \Sigma_2$ אזי $\Sigma_1 \vdash \varphi$.

נאמר שקבוצת נוסחאות סגורות Σ היא בלתי תלויה אם לכל נוסחה סגורה $\varphi \in \Sigma$, $\Sigma - \{\varphi\} \nvdash \varphi$.

(א) הוכח שאם Σ קבוצה סופית של נוסחאות סגורות, יש לה תת קבוצה שקולה, שהיא בלתי תלויה.

(ב) תן דוגמא לקבוצת נוסחאות סגורות Σ, שאין לה תת קבוצה שקולה בלתי תלויה.

משפט הקומפקטיות עבור לוגיקה מסדר ראשון

3.7 תרגיל. תהי Γ קבוצת נוסחאות סגורות כך שלכל תת קבוצה סופית של Γ יש מודל. הוכח של Γ יש מודל.

4.7 תרגיל. יהיו Σ_1 ו Σ_2 קבוצות נוסחאות סגורות (לא בהכרח סופיות), כך שאין מודל $\mathcal{M}$ המקיים $\mathcal{M} \models \Sigma_1$ וכן $\mathcal{M} \models \Sigma_2$.
הוכח שיש נוסחה סגורה φ כך שכל מודל של Σ_1 מקיים את φ וכל מודל של Σ_2 מקיים את $\neg\varphi$.

5.7 תרגיל. נשתמש בשפה של תורת החבורות, כלומר יש לנו סמל יחס בינארי $+$ וסמל קבוע 0.

(א) מצא נוסחה סגורה φ כך שלכל מודל $\mathcal{M}$ עבור השפה שלנו $\mathcal{M} \models \varphi$ אם ורק אם $\mathcal{M}$ חבורה.

(ב) מצא תאוריה Γ כך שלכל מודל $\mathcal{M}$ עבור השפה שלנו, $\mathcal{M} \models \Gamma$ אם ורק אם $\mathcal{M}$ חבורה אינסופית.

(ג) הוכח שאם Γ תאוריה כך שכל חבורה סופית היא מודל של Γ, אז יש חבורה אינסופית שהיא מודל של Γ.

(ד) הוכח שאם φ היא נוסחה סגורה כך שכל חבורה אינסופית היא מודל של φ, אז יש חבורה סופית שהיא מודל של φ.

תאוריות הנקין

6.7 תרגיל. תהי Γ תאוריה כך ש:

1. Γ תאורית הנקין.
2. לכל שני סמלי קבועים c, d, $\Gamma \vdash \mathrm{c} = \mathrm{d}$ או $\Gamma \vdash \mathrm{c} \neq \mathrm{d}$ (כלומר, $\Gamma \vdash \neg\, \mathrm{c} = \mathrm{d}$).
3. יש שני סמלי קבועים a, b כך ש $\Gamma \vdash \mathrm{a} \neq \mathrm{b}$.

הוכח ש Γ תאוריה שלמה.
(רמז: לכל נוסחה סגורה φ, התבונן בנוסחה הסגורה

$$\exists \mathrm{x}\big[(\varphi \wedge \mathrm{x} = \mathrm{a}) \vee (\neg\varphi \wedge \mathrm{x} = \mathrm{b})\big]$$

והפעל את (1)).

7.7 תרגיל. הוכח ש (1) ו (2) מהתרגיל הקודם אינם גוררים ש Γ שלמה. (רמז: כדוגמא נגדית, קח תאוריה Γ שכל המודלים שלה הם עם איבר אחד בלבד).

8.7 תרגיל. נתבונן בתנאי הבא:

(3)′ $\Gamma \nvdash \forall \mathrm{x} \forall \mathrm{y}\, \mathrm{x} = \mathrm{y}$.

האם (1)∧(2)∧(3)′ גורר ש Γ שלמה? (רמז: מספיק להראות שזה גורר את (3)).