מילוי המרחב במעגלים זרים

בועז צבאן

2 בינואר 2019

נפרט הוכחה מלאה של המשפט הבא של שירפינסקי.

משפט 0.1 $\mathbb{R}^3$ הוא איחוד של מעגלים זרים. **הוכחה:** הוכחה: נמספר $\mathbb{R}^3 = \{p_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$. נבחר, ברקורסיה על $\alpha < \mathfrak{c}$, מעגלים זרים C_α כך ש $p_\alpha \in C_\alpha$.

שלב $\alpha < \mathfrak{c}$: נניח באינדוקציה שכבר בחרנו מעגלים זרים $\{C_\beta : \beta < \alpha\}$ כך ש $\{p_\beta : \beta < \alpha\} \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} C_\beta$.

לכל ישר ℓ, בחיתוך שלו עם כל מעגל יש לכל היותר שתי נקודות, ולכן

$$\left|\ell \cap \bigcup_{\beta<\alpha} C_\beta\right| = \left|\bigcup_{\beta<\alpha} \ell \cap C_\beta\right| \leq \max\{|\alpha|, \aleph_0\} < \mathfrak{c}.$$

בפרט, $\bigcup_{\beta<\alpha} C_\beta \neq \mathbb{R}^3$.

תהי

$$\gamma_\alpha := \min\left\{\gamma : p_\gamma \notin \bigcup_{\beta<\alpha} C_\beta\right\} \geq \alpha.$$

נסמן $p = p_{\gamma_\alpha}$. נקבע ישר המכיל את הנקודה p, ומישור המכיל ישר זה, נחשוב על הישר כציר סיבוב של המישור.

נסובב את המישור על הציר. יש לנו פחות מ $\mathfrak{c}$ מעגלים (C_β, עבור $\beta < \alpha$), וכל מעגל מוכל בלכל היותר סיבוב של המישור בזוית אחת, לכן יש פחות מ $\mathfrak{c}$ זויות שמכילות מעגל מבין אלה. כיון שיש $\mathfrak{c}$ זויות אפשריות, קיים מישור P שאינו מכיל אף מעגל מאלה שכבר בחרנו. אז כל מעגל C_β (עבור $\beta < \alpha$) חותך את המישור בלכל היותר שתי נקודות, שאינן p, ולכן יש במישור פחות מ $\mathfrak{c}$ נקודות מהקבוצה $\bigcup_{\beta<\alpha} C_\beta$, כלומר, עוצמת הקבוצה $B := P \cap \bigcup_{\beta<\alpha} C_\beta$ קטנה מ $\mathfrak{c}$.

נקבע ישר במישור P שבחרנו, שהנקודה p שייכת לו. יש $\mathfrak{c}$ מעגלים משיקים לישר זה בנקודה p ולכל שניים מהם, רק הנקודה p (שאינה בקבוצה B) נמצאת בשניהם. לכן

$$|\{C : C \cap B \neq \emptyset\}| \leq |B| < \mathfrak{c}.$$

(הפונקציה ששולחת כל $b \in P$ למעגל שהיא נמצאת עליו (אם יש כזה, ואם אין, אז לאיבר שרירותי בקבוצה), היא "על" הקבוצה שמשמאל.)

כיון שיש $\mathfrak{c}$ מעגלים משיקים כנ"ל, אחד מהם זר לקבוצה B, נסמנו C_α. כיון שהמעגל נמצא במישור P, הוא זר לקבוצה $\bigcup_{\beta<\alpha} C_\beta$.

כמובן, $p \in C_\alpha$. הנחת האינדוקציה נשמרת.

לאחר $\mathfrak{c}$ צעדים, קיבלנו מעגלים זרים המקיימים $\mathbb{R}^3 = \{p_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\} \subseteq \bigcup_{\alpha<\mathfrak{c}} C_\alpha$. ■