# תקציר הרצאות והצעות לתרגול בתורת הקבוצות

בועז צבאן

17 בפברואר 2019

מטרות הקורס: בניית יסודות למתמטיקה (אקסיומות ברורות מאליהן, חפות מסתירות). פיתוח שיטות בסיסיות לטיפול במבנים מתמטיים אינסופיים. יישומים של תורת הקבוצות לענפי מתמטיקה אחרים.

**מוסכמות:** כיון שכל אובייקט מתמטי ניתן לקודד כקבוצה, נדבר לשם קיצור רק על **קבוצות שכל איבר שלהן הוא קבוצה**.

ממילא, גם איברים של איברים של קבוצות הם קבוצות, וכולי.

משתנים המופיעים בלי כמתים בטענה, הכוונה לכל ערך (רלוונטי) של המשתנה.

אייטמים המצויינים ב * הם תרגיל.

## 1 קבוצות סדורות היטב

### 1.1 קבוצות סדורות קוית

1. תהי $A$ קבוצה ויהי נתון יחס $<$ על $A$. הקבוצה $A$ **סדורה חלקית** על ידי $<$ אם היחס הוא:

   (א) **אנטי־רפלקסיבי**: $a \not< a$, וגם

   (ב) **טרנזיטיבי**: $a < b < c \longrightarrow a < c$.

   אומרים גם שהיחס $<$ הוא **יחס סדר חלקי** על $A$, **מסדר חלקית** את $A$, וכדומה.

2. דוגמאות שראינו:

   (א) סופיות (לא קוית וקוית),

   (ב) היחס $<$ על $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$,

   (ג) היחס "מחלק (ממש) את" על $\mathbb{N}$,

   (ד) היחס $\in$ על $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

   (ה) "מעגל" אינו סדר חלקי.

3. הקבוצה $A$ **סדורה באופן מלא** (או: **סדורה קוית**) על ידי $<$ אם היחס הוא סדר חלקי (=אנטי־רפלקסיבי וטרנזיטיבי), ובנוסף כל שני איברים ניתנים להשוואה: לכל $a, b \in A$ שונים, מתקיים $a < b$ או $b < a$.

   אומרים גם שהיחס $<$ הוא יחס **סדר מלא/קוי** על $A$, **מסדר באופן מלא/קוי** את $A$, וכדומה.

4. דוגמאות (מהנ"ל).

5. כל סדר מלא הוא טריכוטומי: מתקיימת אחת ורק אחת מהאפשרויות $a < b,\ a = b,\ b < a$.

## 1.2 קבוצות סדורות היטב

1. **איבר ראשון** בקבוצה סדורה חלקית: איבר שקטן מכל האיברים האחרים בקבוצה.
2. הקבוצה $A$ **סדורה היטב** על ידי $<$ אם היחס הוא סדר מלא, ובכל תת־קבוצה לא ריקה $B \subseteq A$ יש איבר ראשון.
   אומרים גם שהיחס $<$ הוא יחס **סדר טוב** על $A$, **מסדר היטב** את $A$, וכדומה.
3. דוגמאות (מהנ"ל).
4. * כל קבוצה סופית סדורה קוית היא סדורה היטב.
   $\mathbb{Z}$ או $\mathbb{Q}$ דוגמא נגדית במקרה האינסופי.
5. סדר חלקי שבו לכל תת־קבוצה לא ריקה יש איבר ראשון הוא סדר טוב.
6. סדר חלקי/מלא/טוב על קבוצה (משרה) סדר חלקי/מלא/טוב על כל תת־קבוצה.

## 1.3 מספרים סודרים

1. $A$ קבוצה **$\in$־טרנזיטיבית** אם כל איבר של איבר של $A$ נמצא ב $A$: $b \in a \in A \longrightarrow b \in A$.
2. **איחוד קבוצה** $\mathcal{F}$ של קבוצות: $\bigcup \mathcal{F} = \{a \,:\, \exists A \in \mathcal{F},\, a \in A\}$.
3. **חיתוך קבוצה** $\mathcal{F}$ לא ריקה של קבוצות: $\bigcap \mathcal{F} = \{a \,:\, \forall A \in \mathcal{F},\, a \in A\}$.
   אילו היינו מרשים $\mathcal{F} = \emptyset$ היינו מקבלים $\bigcap \mathcal{F} = \{a \,:\, a = a\}$ משפחת כל הקבוצות, שאינה יכולה להיות קבוצה (הפרדוקס של ראסל).
4. * איחוד וחיתוך משפחה של קבוצות $\in$־טרנזיטיביות הוא $\in$־טרנזיטיבי.
5. **מספר סודר** (בקיצור: **סודר**): קבוצה $\in$־טרנזיטיבית הסדורה היטב על ידי $\in$.
   פורמלית, יחס הסדר הוא צימצום $\in$ לקבוצה.
6. דוגמאות: $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ סודרים.
7. אותיות יוניות קטנות $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ תמיד יציינו סודרים.
8. * $\alpha \notin \alpha$.
   אילו $\alpha \in \alpha$ היה ב $\alpha$ איבר שקטן מעצמו.
9. * $s(\alpha) := \alpha \cup \{\alpha\}$ סודר.
10. דוגמאות: $0 := \emptyset, 1 := \{0\}, 2 := \{0, 1\}, \ldots$.
11. כל איבר של סודר הוא סודר.
12. * אם $\alpha \subseteq A$ היא $\in$־טרנזיטיבית, אז $A = \alpha$ או $A \in \alpha$ (ובפרט סודר).
    * אם $A \subsetneq \alpha$ היא $\in$־טרנזיטיבית, אז $\beta := \min \alpha \setminus A$ שווה ל $A$.

## 1.4 השוואת סודרים

1. $\alpha < \beta$ פירושו $\alpha \in \beta$.
2. $\alpha \leq \beta \Longleftrightarrow \alpha \subseteq \beta$.
   $\alpha < \beta \Longleftrightarrow \alpha \subsetneq \beta$.
3. טריכוטומיות השוואת סודרים: מתקיימת אחת ורק אחת מהאפשרויות $\alpha \in \beta,\ \alpha = \beta,\ \beta < \alpha$.
   $\gamma := \alpha \cap \beta$ קבוצה $\in$־טרנזיטיבית, ואם לא שווה לאף אחד מ $\alpha, \beta$, אז שייך לשניהם ולכן לעצמו, סתירה.
4. דוגמא: לכל $\alpha \neq 0$ מתקיים $0 < \alpha$.

5. תהי $\mathcal{F}$ קבוצה לא ריקה של סודרים. אז $\bigcap \mathcal{F} = \min \mathcal{F}$.
$\alpha := \bigcap \mathcal{F}$ סודר ומוכל בכל אברי $\mathcal{F}$. אילו מוכל ממש בכולם אז שייך לכולם ו $\alpha \in \alpha$, סתירה.

6. * תהי $\mathcal{F}$ קבוצת סודרים. אז $\sup \mathcal{F} := \bigcup \mathcal{F}$ סודר, והוא הסודר הקטן ביותר שגדול או שווה לכל אברי $\mathcal{F}$.

7. כל קבוצה $\in$־טרנזיטיבית של סודרים היא סודר.

8. * מחלקת כל הסודרים $\mathrm{ON}$ אינה קבוצה.

## 1.5 לתרגיל ולשיעורי הבית

1. אם $A$ סדורה היטב ויש $f : A \to B$ על, אז יש סדר טוב על $B$.

2. קבוצה סדורה לינארית היא סדורה היטב אם ורק אם אין בה סידרה יורדת.

3. נכליל את הגדרת הסדר המילוני למכפלה של מספר סופי כלשהו של קבוצות סדורות היטב, באינדוקציה:
הסדר המילוני על $A_1 \times \cdots \times A_{n-1} \times A_n$ מוגדר בצורה הבאה:

$$(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n) < (b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n)$$

אם ורק אם: $(a_1, \ldots, a_{n-1}) < (b_1, \ldots, b_{n-1})$, או $(a_1, \ldots, a_{n-1}) < (b_1, \ldots, b_{n-1})$ ו $a_n < b_n$.
ניקח את הסדר הרגיל (והטוב) על הקבוצה $\{0, 1\}$. מהשאלה הקודמת, נובע באינדוקציה שלכל $n$ טבעי, הקבוצה

$$\{0, 1\}^n = \{(a_1, \ldots, a_n) \,:\, \forall i,\, a_i \in \{0, 1\}\}$$

סדורה היטב על ידי הסדר המילוני.
הסדר המילוני על קבוצת הסדרות של אפסים ואחדים

$$\{0, 1\}^{\mathbb{N}} := \{(a_0, a_1, \ldots) \,:\, \forall n,\, a_n \in \{0, 1\}\}$$

מוגדר בצורה הבאה: $(a_0, a_1, \ldots) < (b_0, b_1, \ldots)$ אם ורק אם: יש מספר טבעי $n$ כך ש $(a_0, \ldots, a_{n-1}) = (b_0, \ldots, b_{n-1})$, ו $a_n < b_n$.
קל לראות שהסדר הזה הוא מלא. הוכח שסדר זה אינו טוב.

4. התכונות הבאות שקולות לכל קבוצה $A$:
   (א) $A$ היא $\in$־טרנזיטיבית.
   (ב) לכל $B \in A$ מתקיים $B \subseteq A$.
   (ג) $\bigcup A \subseteq A$.

5. עבור קבוצה $A$, נגדיר באינדוקציה על המספרים הטבעיים:
   (א) $A_0 := A$.
   (ב) עבור $0 < n$, $A_n := A_{n-1} \cup \bigcup A_{n-1}$.
   (ג) $tc(A) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

הוכח: $tc(A)$ היא הקבוצה ה$\in$־טרנזיטיבית הקטנה ביותר (מבחינת הכלה) המכילה את $A$. (שתי טענות: $tc(A)$ היא $\in$־טרנזיטיבית, ולכל קבוצה $\in$־טרנזיטיבית $B$ המכילה את $A$ מתקיים $tc(A) \subseteq B$.)
הערה: הקבוצה $tc(A)$ נקראת הסגור הטרנזיטיבי (*transitive closure*) של $A$.

6. האם תיתכן קבוצה $A$ כך שכל תת־קבוצה של $A$ היא גם איבר של $A$?

## 2 חיבור סודרים

### 2.1 סודרים עוקבים וגבוליים

1. $s(\alpha) := \alpha \cup \{\alpha\}$.
2. $s(\alpha)$ **עוקב מיידי** של $\alpha$: $\alpha < s(\alpha)$ ואין ביניהם סודר.
3. $0 := \emptyset, 1 := s(0) = \{0\}, 2 := s(1) = \{0,1\}, \dots$.
4. סודר $\alpha > 0$ הוא:
   (א) **סודר עוקב** אם $\alpha = s(\beta)$ לאיזשהו $\beta$.
   (ב) **סודר גבולי** אם אינו עוקב.
5. דוגמאות:
   (א) $0$ אינו עוקב ואינו גבולי.
   (ב) $1, 2, \dots$ סודרים עוקבים.
6. $\alpha > 0$ גבולי $\iff \sup\alpha = \alpha$ $(\sup\{\beta : \beta < \alpha\} =)$.

### 2.2 מספרים טבעיים

1. סודר הוא **מספר טבעי** אם הוא $0$ או עוקב, ופרט ל $0$, כל הסודרים הקטנים ממנו הם עוקבים.
2. $0, 1, 2, 3, \dots$ הם מספרים טבעיים.
3. האותיות $i, j, k, l, m, n$ יציינו תמיד מספרים טבעיים.
4. אם $n$ מספר טבעי אז כל סודר קטן יותר טבעי, וגם העוקב של $n$ טבעי.
5. קבוצת כל המספרים הטבעיים (כשנתייחס אליה כסודר) תיקרא $\omega$.
   אינטואיטיבית, $\omega := \{0, 1, 2, \dots\}$.
6. $\omega$ סודר גבולי, והוא גדול מכל מספר טבעי.
   $\omega < s(\omega) = \{0, 1, 2, \dots, \omega\}$ סודר עוקב אינסופי.
7. * **אקסיומות פאנו** עבור המספרים הטבעיים מתקיימות עבור $\omega$:
   (א) $s(n) \neq 0$. [תרגיל]
   (ב) אם $s(m) = s(n)$ אז $m = n$. [תרגיל]
   (ג) אקסיומת האינדוקציה: אם $A \subseteq \omega$ ו $0 \in A$ ולכל $n \in A$ גם $s(n) \in A$, אז $A = \omega$.

### 2.3 הטיפוס של סדר טוב

1. **איזומורפיזם של קבוצות סדורות היטב**: פונקציה $f : A \to B$ חד־חד ערכית ועל כך ש $a_1 < a_2 \iff f(a_1) < f(a_2)$.
   אם יש אומרים שהקבוצות **איזומורפיות**, $A \cong B$.
2. מספיק ש $f$ על ומקיימת $a_1 < a_2 \Longrightarrow f(a_1) < f(a_2)$.
3. אם $\beta \cong \alpha$ אז $\beta = \alpha$.
   אחרת בה"כ $\alpha < \beta$ והאיזומורפיזם $f : \beta \to \alpha$ מקיים $f(\alpha) < \alpha$. יהי $\gamma \in \beta$ הראשון כך ש $f(\gamma) < \gamma$. אז $f(f(\gamma)) < f(\gamma)$, סתירה.
4. **רישא** בקבוצה סדורה היטב: $\overset{x}{A} = \{a \in A \,:\, a < x\}$.

5. לכל $\beta < \alpha$ מתקיים: $\overset{\beta}{\alpha} = \beta$ רישא של $\alpha$.
6. אם (ורק אם) $\alpha$ איזומורפי לרישא של $\beta$, אז $\alpha < \beta$.
7. * אם $A \cong B$ אז כל רישא של $A$ איזומורפית לרישא של $B$.
8. * כל קבוצה סדורה היטב איזומורפית לסודר יחיד.
קיום: $f := \left\{(a,\alpha) \,:\, a \in A,\, \overset{a}{A} \cong \alpha\right\}$ היא
(א) חד ערכית מ (3).
(ב) תמונתה היא סודר $\delta$: $\in$־טרנזיטיבית: אם $\beta < \alpha \cong \overset{a}{A}$ אז הרישא $\beta$ של $\alpha$ איזומורפית לרישא של $\overset{a}{A}$ שהיא רישא של $A$.
(ג) שומרת סדר: אם $a_1 < a_2$, $\overset{a_1}{A} \cong \alpha_1$ ו $\overset{a_2}{A} \cong \alpha_2$ אז $\alpha_1$ איזומורפי לרישא של $\overset{a_2}{A}$ שאיזומורפית לרישא של $\alpha_2$.
(ד) תחומה $A$: אם $a$ הראשון מחוץ לתחום, אז גם כל $\tilde{a} > a$ מחוץ לתחום, ואז $\overset{a}{A} \cong \delta$, ולכן $a$ בתחום.
9. **טיפוס הסדר** של קבוצה סדורה היטב, $\mathrm{type}(A)$: הסודר (היחיד) שאיזומורפי ל $A$.

## 2.4 חיבור סודרים

1. יהיו $A, B$ קבוצות סדורות היטב. **הסדר המילוני** על $A \times B$ מוגדר: $(a_1,b_1) < (a_2,b_2)$ אם ורק אם: $a_1 < a_2$, או $a_1 = a_2$ ו $b_1 < b_2$.
2. הסדר המילוני על מכפלת שתי קבוצות סדורות היטב הוא סדר טוב.
3. דוגמא: $\mathrm{type}(2 \times 2) = 4$.
4. הקבוצה $\alpha \uplus \beta := (\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \beta)$ סדורה היטב מילונית.
עבור $\gamma := \max\{\alpha, \beta\}$, $(\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \beta) \subseteq 2 \times \gamma$.
5. **חיבור סודרים**: $\alpha + \beta := \mathrm{type}(\alpha \uplus \beta)$.
6. דוגמאות: $2 + 2 = 4$, $1 + \omega = \omega$, $\omega + 1 = S(\omega)$. בפרט, חיבור סודרים אינו קומוטטיבי.
7. תכונות בסיסיות:
(א) * $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$. (שניהם איזומורפיים ל $(\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \beta) \cup (\{2\} \times \gamma)$).
(ב) $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$.
(ג) $\alpha + 1 = S(\alpha)$.
(ד) * אם $0 < \beta$ אז $\alpha < \alpha + \beta$.
$\alpha$ איזומורפי לרישא $\{0\} \times \alpha$ של $\alpha \uplus \beta$ ולכן לרישא של $\alpha + \beta$.
8. * **חיסור סודרים:** יהיו $\alpha \le \beta$. $\beta - \alpha := \mathrm{type}(\beta \setminus \alpha)$.
(א) $\alpha + (\beta - \alpha) = \beta$.
(ב) $\alpha = \beta \iff \beta - \alpha = 0$.
$\alpha < \beta \iff \beta - \alpha > 0$.
9. * אם $\beta_1 < \beta_2$, אז $\alpha + \beta_1 < \alpha + \beta_2$.
$\alpha + \beta_1 < (\alpha + \beta_1) + (\beta_2 - \beta_1) = \alpha + (\beta_1 + (\beta_2 - \beta_1)) = \alpha + \beta_2$.
10. * אם $\beta$ גבולי, אז $\alpha + \beta = \sup\{\alpha + \gamma \,:\, \gamma < \beta\}$.
$(\le)$ יהי $\delta < \alpha + \beta$. אם $\delta < \alpha$ אז $\delta < \alpha + 1 \le \sup$. אם $\alpha \le \delta = \alpha + \epsilon < \alpha + \beta$ אז $\epsilon < \beta$ ולכן $\delta = \alpha + \epsilon < \alpha + \epsilon + 1 \le \sup$.
11. * אם $\beta$ גבולי, אז $\alpha + \beta$ גבולי.
מסעיף קודם.

### 2.5 לתרגיל ולבית

1. $\alpha<\beta \iff s(\alpha)<s(\beta)$.
2. $0<\alpha$ הוא סודר גבולי אם ורק אם לכל $\beta<\alpha$ מתקיים שגם $s(\beta)<\alpha$.
3. לכל סודר $\alpha$, $\sup\alpha\le\alpha$. אם יש ב $\alpha$ איבר אחרון $\beta$, אז $\sup\alpha=\beta<\alpha$. אחרת, $\sup\alpha=\alpha$.
4. הוכח שהקבוצה $\omega$ מקיימת את שתי האקסיומות הראשונות של פאנו.
5. יהי $0<\alpha$. הוכח:
   (א) $\alpha$ סודר עוקב $\iff$ יש ב $\alpha$ איבר אחרון $\iff$ $\sup\alpha$ איבר אחרון ב $\alpha$.
   (ב) $\alpha$ סודר גבולי $\iff$ $\sup\alpha=\alpha$.
6. הוכח שהאיזומורפיזם היחיד מקבוצה סדורה היטב לעצמה הוא פונקציית הזהות.
   הדרכה: בהנתן איזומורפיזם $f\colon A\to A$ שאינו הזהות, קח $a\in A$ ראשון כך ש $f(a)\ne a$. בהכרח $f(a)<a$ או $f^{-1}(a)<a$.
7. הוכח שאם $A\cong B$ קבוצות סדורות היטב, אז האיזומורפיזם הוא יחיד.
8. קבוצה סדורה היטב אינה איזומורפית לאף רישא של עצמה.
9. אין שתי רישאות איזומורפיות של קבוצה סדורה היטב $A$: אם $x,y\in A$ ומתקיים $\overset{x}{A}=\overset{y}{A}$, אז $x=y$.
10. **משפט על השוואת סדרים טובים:** לכל שתי קבוצות סדורות היטב, או שהן איזומורפיות, או שאחת מהן איזומורפית לרישא של השניה.
    הדרכה: השתמש במשפט שכל קבוצה סדורה היטב היא איזומורפית לסודר.
11. הוכח שלא תיתכן סידרה אינסופית יורדת ממש $\alpha_1>\alpha_2>\cdots$ של סודרים.
12. $\alpha+1=S(\alpha)$.
13. אם $\beta$ גבולי, אז $\alpha+\beta$ גבולי.
14. הפרך, על ידי דוגמאות נגדיות, כל אחת מהטענות הבאות:
    (א) אם $0<\beta$ אז $\alpha<\beta+\alpha$.
    (ב) אם $\beta_1<\beta_2$, אז $\beta_1+\alpha<\beta_2+\alpha$.
    (ג) אם $\beta$ גבולי, אז $\beta+\alpha=\sup\{\gamma+\alpha\ :\ \gamma<\beta\}$.
    (ד) אם $\beta$ גבולי, אז $\beta+\alpha$ גבולי.
    (ה) לכל $\beta$, הפונקציה $f(\alpha):=\alpha+\beta$ מונוטונית ורציפה.

# 3 כפל סודרים, אינדוקציה, חזקות סודרים ומשפט גודשטיין

## 3.1 כפל סודרים

1. **כפל סודרים:** $\alpha\cdot\beta:=\mathrm{type}(\beta\times\alpha)$, כאשר $\beta\times\alpha$ סדורה מילונית.
2. דוגמאות: $2\cdot2=4, 2\cdot\omega=\omega, \omega\cdot2=\omega+\omega>\omega=2\cdot\omega$.
3. תכונות בסיסיות:
   (א) $\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$.
   (ב) * $\alpha\cdot0=0\cdot\alpha=0$.
   (ג) * $\alpha\cdot1=1\cdot\alpha=\alpha$.
   (ד) * $\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$.

(ה) * אם $\beta_1 < \beta_2$ ו $0 < \alpha$ אז $\alpha \cdot \beta_1 < \alpha \cdot \beta_2$.

4. עבור $\beta$ גבולי, $\alpha \cdot \beta = \sup \{\alpha \cdot \gamma \,:\, \gamma < \beta\}$.

(≤) יהי $\delta < \alpha \cdot \beta$. יהי $f : \alpha \cdot \beta \to \beta \times \alpha$ האיזומופיזם. $(\gamma, \epsilon) := f(\delta)$. $\beta \overset{(\gamma,\epsilon)}{\times} \alpha \cong \alpha \overset{\delta}{\cdot} \beta = \delta$ רישא של $\alpha(\gamma+1) \cong (\gamma+1) \times \alpha$, לכן $\delta < \alpha(\gamma + 1) \leq \sup$.

5. אם $\beta$ גבולי ו $0 < \alpha$, אז $\alpha \cdot \beta$ גבולי.

6. * יוגדר ויטופל בתרגיל:

(א) פונקציה על סודרים היא:

i. **מונוטונית** אם $f(\alpha_1) \leq f(\alpha_2)$ לכל זוג סודרים $\alpha_1 \leq \alpha_2$.

ii. **רציפה** אם $f(\beta) = \sup \{f(\gamma) \,:\, \gamma < \beta\}$ לכל סודר גבולי $\beta$.

(ב) לכל $\alpha$, הפונקציה $f(\beta) := \alpha + \beta$ מונוטונית ורציפה.

(ג) אם $f$ מונוטונית ורציפה, $\beta$ גבולי, ו $B \subseteq \beta$ מקיימת $\sup B = \beta$, אז $\sup \{f(\gamma) \,:\, \gamma \in B\} = f(\beta)$.

(ד) דוגמא: אם $\beta$ גבולי, ו $B \subseteq \beta$ מקיימת $\sup B = \beta$, אז $\sup \{\alpha + \gamma \,:\, \gamma \in B\} = \alpha + \beta$.

(ה) $f(\beta) = \alpha \cdot \beta$ מונוטונית ורציפה, לכן $\sup \{\alpha \cdot \gamma \,:\, \gamma \in B\} = \alpha \cdot \beta$ לכל $B \subseteq \beta$ כך ש $\sup B = \beta$.

## 3.2 אינדוקציה טרנספיניטית

1. תכונה $\varphi$ של סודרים היא **אינדוקטיבית** אם לכל $\alpha$ מתקיים:
אם לכל הסודרים הקטנים מ $\alpha$ יש התכונה $\varphi$, אז גם ל $\alpha$ יש התכונה $\varphi$.
כלומר: אם $(\forall \beta < \alpha) \, \varphi(\beta)$, אז גם $\varphi(\alpha)$.

2. אם $\varphi$ היא אינדוקטיבית, אז $\varphi(0)$, לכן $\varphi(1)$, לכן $\varphi(2)$, לכן ..., לכן $\varphi(\omega)$, לכן $\varphi(\omega+1)$, לכן ...

3. **אינדוקציה טרנספיניטית:** אם $\varphi$ אינדוקטיבית, אז לכל $\alpha$ יש התכונה $\varphi$.

4. **גירסה נוספת של אינדוקציה טרנספיניטית:** תהי $\varphi$ תכונה כך שמתקיים:

(א) $\varphi(0)$.

(ב) לכל $\beta$: אם $\varphi(\beta)$, אז $\varphi(\beta + 1)$.

(ג) לכל סודר גבולי $\alpha$: אם $(\forall \beta < \alpha) \, \varphi(\beta)$, אז $\varphi(\alpha)$.

אזי $(\forall \alpha) \, \varphi(\alpha)$.
(כי $\varphi$ אינדוקטיבית.)

5. * דוגמא: $\alpha \leq \beta + \alpha$ באינדוקציה על $\alpha$.

6. * **מונוטוניות חיבור סודרים:** אם $\alpha_1 \leq \alpha_2, \beta_1 \leq \beta_2$, אז $\alpha_1 + \beta_1 \leq \alpha_2 + \beta_2$.
$\alpha + \beta_1 \leq \alpha + \beta_2$ (ראינו).
$\alpha_1 + \beta \leq \alpha_2 + \beta$: $\delta := \beta - \alpha$. $\alpha_1 + \beta \leq \alpha_1 + \delta + \beta = \alpha_2 + \beta$.

7. * **מונוטוניות כפל סודרים:** אם $\alpha_1 \leq \alpha_2, \beta_1 \leq \beta_2$, אז $\alpha_1 \cdot \beta_1 \leq \alpha_2 \cdot \beta_2$.

8. * דוגמא: הוכחה באינדוקציה ש $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.
המקרה הגבולי משתמש במונוטוניות ורציפות החיבור והכפל ברכיב הימני.

### 3.3 חזקות סודרים

1. **חזקות סודרים** מוגדרות ברקורסיה (שתוצדק בהמשך): עבור $0 < \alpha$:
   (א) $\alpha^0 := 1$.
   (ב) $\alpha^{\beta+1} := \alpha^\beta \cdot \alpha$.
   (ג) עבור $\beta$ גבולי: $\alpha^\beta := \sup\{\alpha^\gamma : \gamma < \beta\}$.
2. עבור $\alpha = 0$, נגדיר $0^0 := 1$ ו $0^\beta = 0$ לכל $0 < \beta$.
3. דוגמאות: $2^2 = 4, \omega^2 = \omega \cdot \omega > \omega, 2^\omega = \omega$.
4. * $\alpha^1 = \alpha$.
5. * $0^\alpha = 0$.
6. אם $\beta_1 \le \beta_2$, אז $\alpha^{\beta_1} \le \alpha^{\beta_2}$.
   באינדוקציה על $\beta_2$.
7. * $f(\beta) = \alpha^\beta$ מונוטונית ורציפה.
8. * $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$.

באינדוקציה על $\gamma$. המקרה הגבולי: גם $\beta + \gamma = \sup\{\beta + \delta : \delta < \gamma\}$ גבולי, לכן ממונוטוניות ורציפות חזקה במעריך, הנחת האינדוקציה, ומונוטוניות ורציפות כפל ברכיב הימני,

$$\alpha^{\beta+\gamma} = \sup\left\{\alpha^{\beta+\delta} : \delta < \gamma\right\} = \sup\left\{\alpha^\beta \cdot \alpha^\delta : \delta < \gamma\right\} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma.$$

9. * $\left(\alpha^\beta\right)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$.
   דומה.

סעיף זה הוא הסיבה שהגדרנו $\alpha \cdot \beta = \mathrm{type}(\beta \times \alpha)$ ולא $\alpha \cdot \beta = \mathrm{type}(\alpha \times \beta)$: אחרת היינו מקבלים $\left(\alpha^\beta\right)^\gamma = \alpha^{\gamma\beta}$ במקום מה שקיבלנו לעיל.

10. * **מונוטוניות חזקות סודרים:** אם $\alpha_1 \le \alpha_2, \beta_1 \le \beta_2$, אז $\alpha_1^{\beta_1} \le \alpha_2^{\beta_2}$.
    $\alpha_1^\beta \le \alpha_2^\beta$ באינדוקציה על $\beta$.

### 3.4 משפט גודשטיין

1. הסעיפים הבאים עוסקים במשפט גודשטיין בתורת המספרים. יש דוגמאות יפות בערך של ויקיפדיה באנגלית: Goodstein's Theorem.
2. **הצגה בבסיס** $b$ של מספר טבעי $m$: $m = b^{e_l} \cdot k_l + b^{e_{l-1}} \cdot k_{l-1} + \cdots + b^{e_1} \cdot k_1$ כאשר $e_1 < e_2 < \cdots < e_l$ ו $0 < k_1, \ldots, k_l < b$.
3. **ההצגה התורשתית** של מספר טבעי $m$ בבסיס $b$ היא זו שבה $m$ מוצג בבסיס $b$, וכל המספרים בהצגה זו (המעריכים של החזקות וכולי) מוצגים אף הם בבסיס $b$.
4. **סידרת גודשטיין** של מספר טבעי $m$: $m_1 = m$, ולכל $1 \le n$, $m_{n+1}$ מתקבל מ $m_n$ על ידי: חישוב ההצגה התורשתית של $m_n$ בבסיס $n$, החלפת כל $n$ בהצגה שהתקבלה ב $(n+1)$, וחיסור $1$ מהמספר המתקבל.
5. **משפט גודשטיין:** כל סדרת גודשטיין מגיעה, לאחר מספר סופי של צעדים, לערך $0$.
   לכל איבר $m_n$ בסידרה, יהי $\alpha_n$ הסודר המתקבל מ $m_n$ על ידי החלפה, בהצגתו התורשתית לפי בסיס $n$, כל $n$ ב $\omega$.
   כל עוד $0 < m_n$, מתקיים $\alpha_{n+1} < \alpha_n$, שכן

$$b^e \cdot k - 1 = b^e(k-1) + b^{e-1}(b-1) + b^{e-2}(b-1) + \cdots + b^2(b-1) + b(b-1) + (b-1)$$

(ואותה תופעה קורית בחזקות).

סידרה יורדת של סודרים חייבת להיעצר אחרי מספר סופי של צעדים.

### 3.5 לתרגיל ולבית

1. $\alpha\cdot 1=1\cdot\alpha=\alpha$.
2. הוכח: $\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$.
3. הפרך את הטענה הבאה: $(\beta+\gamma)\cdot\alpha=\beta\cdot\alpha+\gamma\cdot\alpha$.
4. הוכח: $\alpha\cdot 2=\alpha+\alpha$.
5. הפרך: $2\cdot\alpha=\alpha+\alpha$.
6. הפרך: אם $\gamma<\beta$ ו $0<\alpha$ אז $\gamma\cdot\alpha<\beta\cdot\alpha$.
7. הפרך: עבור $\beta$ גבולי, $\beta\cdot\alpha=\sup\{\gamma\cdot\alpha\ :\ \gamma<\beta\}$.
8. הוכח: אם $\beta$ גבולי ו $0<\alpha$, אז $\beta\cdot\alpha$ גבולי.
9. הפרך כל אחת מהטענות הבאות:
   (א) לכל $0<\beta$, הפונקציה $f(\alpha)=\alpha\cdot\beta$ מונוטונית ורציפה.
   (ב) לכל $0<\beta$, $\sup\{\gamma\cdot\alpha\ :\ \gamma\in B\}=\beta\cdot\alpha$ לכל $B\subseteq\beta$ כך ש $\sup B=\beta$.
10. לכל $\alpha,\beta$ עם $0<\beta$ יש $\gamma,\delta$ יחידים כך ש $\alpha=\beta\gamma+\delta$ ו $\delta<\beta$.
    הערה: קיבלנו שאפשר לחלק סודרים עם שארית. אפשר לסמן $\gamma=\alpha/\beta$ ו $\delta=\alpha \bmod \beta$.
11. חשב את $\omega \bmod 5$ ואת $\omega+\omega \bmod \omega$.
12. אם $\gamma<\beta$ ו $1<\alpha$ אז $\alpha^\gamma<\alpha^\beta$. (אינדוקציה על $\beta$.)
13. נזכור שלכל מספר טבעי $N$ יש הצגה יחידה בבסיס 10, כלומר הצגה מהצורה

$$N=10^{m_1}k_1+10^{m_2}k_2+\cdots+10^{m_n}k_n$$

כאשר $n\geq 1$, $m_1>m_2>\cdots>m_n$, ו $0<k_1,\ldots,k_n<10$.
הוכח את האנלוג הבא עבור "הצגה בבסיס $\omega$": לכל סודר $0<\alpha$, יש הצגה יחידה בצורה

$$\alpha=\omega^{\beta_1}\cdot k_1+\omega^{\beta_2}\cdot k_2+\cdots+\omega^{\beta_n}\cdot k_n$$

כך ש $n\geq 1$, $\alpha\geq\beta_1>\beta_2>\cdots>\beta_n$, ו $0<k_1,\ldots,k_n<\omega$. צורה זו של $\alpha$ נקראת הצורה הנורמלית של קנטור עבור $\alpha$.

14. מהי הצורה הנורמלית של קנטור עבור $\varepsilon_0$? (תזכורת: $\varepsilon_0$ הוא הסודר הראשון $\alpha$ המקיים $\alpha=\omega^\alpha$.)

## 4 מחלקות ורקורסיה

### 4.1 מחלקות

1. (תזכורת) **חזקות סודרים** גדולים מאפס מוגדרות ברקורסיה (שתוצדק בהמשך):
   (א) $\alpha^0:=1$.
   (ב) $\alpha^{\beta+1}:=\alpha^\beta\cdot\alpha$.
   (ג) עבור $\beta$ גבולי: $\alpha^\beta:=\sup\{\alpha^\gamma\ :\ \gamma<\beta\}$.
2. **מחלקות:** משפחות מוגדרות היטב של קבוצות, כלומר מהצורה $A=\{x\ :\ \varphi(x)\}$, $\varphi$ תכונה מוגדרת היטב של קבוצות. בהגדרת $\varphi$ אפשר להשתמש בפרמטרים (קבוצות נתונות).
3. **מחלקות של ממש:** מחלקות שאינן קבוצות, כגון $V, ON$.

4. מחלקות אינן אובייקט מתמטי, אלא דרך נוחה לדבר על התכונות המתארות אותן. למשל, אם $A = \{x : \varphi(x)\}$ ו $B = \{x : \psi(x)\}$, אז $A \cap B$ מתוארת על ידי הנוסחה $\varphi \wedge \psi$.

5. בכל מחלקה לא ריקה של סודרים יש איבר ראשון.

ניסוח פורמלי.

6. **פונקציית מחלקה:** עבור מחלקות $A, B$, נאמר ש $F \colon A \to B$ פונקציית מחלקה אם $F = \{(a,b) \in A \times B : \varphi(a,b)\}$ מחלקה, $\mathrm{dom}(F) = A$, ולכל $a \in A$ יש $b \in B$ יחיד כך ש $(a,b) \in F$. במקרה כזה נסמן $b = F(a)$.

## 4.2 רקורסיה

1. **סידרה** באורך $k$ של איברים בקבוצה $A$ היא פונקציה $f \colon k \to A$. נכתוב גם $(f(0), \ldots, f(k-1))$ במקום $f$, ואם נסמן $a_i = f(i)$, נוכל לכתוב זאת $(a_0, \ldots, a_{k-1})$.

בדומה, סידרה $(a_n : n \in \omega)$ היא הפונקציה $f \colon \omega \to A$ המוגדרת $f(n) = a_n$.

באופן כללי, $\alpha$**־סידרה** $(a_\beta : \beta < \alpha)$ היא פונקציה $f \colon \alpha \to A$ , המוגדרת $f(\beta) = a_\beta$.

2. **רקורסיה על אברי סודר** $\delta$**:** לכל פונקציית מחלקה $F : V \to V$, יש פוקנציה יחידה $g$ שתחומה $\delta$, כך ש:

$$\forall \alpha < \delta,\ g(\alpha) = F((g(\beta) : \beta < \alpha)).$$

3. הקדמה להוכחה:

(א) פונקציות $f, g$ הן **מתיישבות** אם לכל $x \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$, $f(x) = g(x)$.

(ב) $f$ **מרחיבה** את $g$ אם $g \subseteq f$. שקול: $g = f|_{\mathrm{dom}(g)}$.

(ג) **הרחבה של פונקציות:** תהי $\mathcal{F}$ קבוצה של פונקציות. $g := \bigcup \mathcal{F}$ פונקציה $\iff$ הפונקציות ב $\mathcal{F}$ מתיישבות.

4. הוכחת משפט הרקורסיה: נקרא ל $g$ כבמשפט $\delta$־טובה.

יחידות: קל.

קיום: אם $\delta \leq \eta$, $g_\delta$ $\delta$־טובה, $g_\eta$ $\eta$־טובה, אז $g_\delta \subseteq g_\eta$.

יהי $\delta$ הראשון כך שאין פונקציה $\delta$־טובה. אם $\delta = 0$ נגדיר $g(0) := F(0)$. אם $\delta = \gamma+1$ נרחיב $g(\gamma) := F((g(\beta) : \beta < \gamma))$. אם $\delta$ גבולי ניקח $\bigcup_{\gamma<\delta} g_\gamma$ (ההרחבה המשותפת של כל הפונקציות $g_\gamma$, $\gamma < \delta$).

5. **רקורסיה על כל הסודרים:** לכל פונקציית מחלקה $F \colon V \to V$, יש פוקנצית מחלקה יחידה $G \colon ON \to V$ כך ש:

$$\forall \alpha,\ G(\alpha) = F((G(\beta) : \beta < \alpha)).$$

הוכחה: לכל $\alpha$, תהי $g_{\alpha+1}$ הפונקציה ממשפט הרקורסיה עבור $\delta = \alpha + 1$. נגדיר $G(\alpha) = g_{\alpha+1}(\alpha)$ לכל $\alpha$. הדרוש מתקיים כי הפונקציות מתיישבות.

6. הגדרת $F$ כך שנקבל הגדרה פורמלית של $G(\alpha) = \gamma^\alpha$:

$$F(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ x_\alpha \cdot \gamma & x \text{ is an } \alpha+1\text{-sequence of ordinals: } (x_\beta : \beta < \alpha+1) \\ \sup\{x_\beta : \beta < \alpha\} & x \text{ is an } \alpha\text{-sequence of ordinals, } \alpha \text{ limit: } x = (x_\beta : \beta < \alpha) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ממשפט הרקורסיה, יש $G$ יחידה עבור $F$ זו, ונוכל לסמן $\gamma^\alpha := G(\alpha)$. ההגדרה היא כך שמתקיימות כל התכונות המגדירות חזקה.

### 4.3 לתרגיל ולבית

1. השתמש במשפט הרקורסיה להצדיק את ההגדרה הרקורסיבית הבאה:
   (א) $0! := 1$.
   (ב) $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$.
2. הוכח בעזרת משפט הרקורסיה: קבוצה סדורה קוית $A$ היא סדורה היטב אם ורק אם אין סידרה יורדת $a_1 > a_2 > \cdots$.
3. הוכח (בעזרת משפט הרקורסיה) שלכל קבוצה אינסופית $A$ של מספרים טבעיים, יש פונקציה $f\colon \omega \to A$ על, שהיא עולה ממש (כלומר, אפשר להציג $A = \{a_n : n \in \omega\}$ כך ש $a_0 < a_1 < \dots$).
4. בחוברת: 4.6, 5.1(ב), 5.3, 5.5(ג), 5.6(א) ־ לתת הדרכה, 5.8 עד 5.11 (5.11 מאד נחמד).

# 5 האקסיומות של תורת הקבוצות (ZFC)

## 5.1 השפה של תורת הקבוצות

1. המטרה: יסוד חף מסתירות למתמטיקה.
2. פרדוקסים שנובעים מהשפה: "המספר הטבעי הקטן ביותר שלא ניתן להגדיר בפחות ממאה מילים".
3. פתרון: **השפה של תורת הקבוצות**: טענות שאפשר לנסח בעזרת:
   (א) נוסחאות אטומיות: $x \in y, x = y$.
   (ב) קשרים לוגיים: $\leftrightarrow ,\to ,\wedge ,\vee$ ו $\neg$.
   (ג) כמתים: $\forall, \exists$.
   (ד) וכל סימן או מושג שאפשר להגדיר בעזרת אלה.

אפשר לנסח את כל הקורס (ואת כל המתמטיקה) בשפה הפורמלית של תורת הקבוצות, אבל כמובן שלא נעשה זאת בפועל. מספיק לוודא שזה אפשרי.

דוגמא: את $x \subseteq y$ אפשר להגדיר כ: $(\forall z)\, z \in x \to z \in y$.

## 5.2 אקסיומות צרמלו־פרנקל

1. **האקסיומות** של צרמלו־פרנקל, עם אקסיומת הבחירה (**ZFC**):
   (א) **קיום:** קיימת קבוצה.
   (ב) **היקפיות:** קבוצות נקבעות על ידי איבריהן (קבוצות עם אותם איברים, שוות).
   (ג) **סכמת ההפרדה:** אם $A$ קבוצה, אז אוסף האיברים ב $A$ שמקיימים תכונה נתונה, גם הוא קבוצה.
   בפירוט: לכל תכונה $\varphi$ של קבוצות (התכונה, אפשר שתהא מוגדרת בעזרת קבוצות נתונות - פרמטרים):
   לכל קבוצה $A$, האוסף $\{x \in A : \varphi(x)\}$ הוא קבוצה.
   (ד) **זוגות:** לכל $x, y$, האוסף $\{x, y\}$ הוא קבוצה.
   (ה) **איחוד:** לכל קבוצה ("משפחה של קבוצות") $\mathcal{F}$, האיחוד $\bigcup \mathcal{F}$ של כל אברי $\mathcal{F}$ הוא קבוצה.
   (ו) **החלפה:** אם נתאים, לכל איבר של קבוצה $A$, איבר אחד ויחיד, אז אוסף האיברים שהותאמו לאברי $A$ הוא קבוצה.
   בפירוט: לכל תכונה $\varphi$ של זוגות, כך שלכל $x$ יש $y$ יחיד שעבורו $\varphi(x, y)$ מתקיים:
   לכל קבוצה $A$, האוסף $\{b : \exists a \in A,\ \varphi(a, b)\}$ הוא קבוצה.
   (ז) **חזקה:** לכל קבוצה $A$, האוסף $P(A) = \{B : B \subseteq A\}$ הוא קבוצה.
   (ח) **יסודיות:** בכל קבוצה לא ריקה יש איבר $\in$־מינימלי.
   בפירוט: בכל קבוצה לא ריקה $A$ יש איבר $a$ כך שאין איבר $b \in A$ המקיים $b \in a$.
   (ט) **אקסיומת האינסוף:** יש קבוצה $I$ כך ש $0 \in I$ ולכל $x \in I$ גם $s(x) \in I$.
   שקול לקיום $\omega$.
   (י) **אקסיומת הבחירה:** לכל קבוצה ("משפחה") $\mathcal{F}$ של קבוצות לא ריקות, יש פונקציית בחירה על $\mathcal{F}$, כלומר פונקציה $f$ שתחומה $\mathcal{F}$, ולכל $A \in \mathcal{F}$ מתקיים $f(A) \in A$.

### 5.3 דוגמאות לשימוש באקסיומות

1. יש לכל היותר קבוצה ריקה אחת (היקפיות).
2. יש קבוצה ריקה (קיום והפרדה).
תסומן $\emptyset$.
3. התכונה המגדירה **זוג סדור** היא $(a_1,b_1)=(a_2,b_2)$ אם ורק אם $a_1=a_2$ ו $b_1=b_2$.
אם נגדיר $(a,b)=\{\{a\},\{a,b\}\}$ אז התכונה מתקיימת, וקיבלנו מימוש של "זוג סדור" כקבוצה.
4. מאקסיומת היסודיות, לא ייתכן $x=\{x\}$.
5. מאקסיומת ההפרדה, החיתוך $\bigcap\mathcal{F}$ של כל אברי קבוצה לא ריקה $\mathcal{F}$ של קבוצות הוא קבוצה.
6. פעולות על זוגות של קבוצות:
   (א) $A\cup B=\bigcup\{A,B\}$ (זיווג ואיחוד).
   (ב) $A\cap B=\bigcap\{A,B\}$ (זיווג וחיתוך).
   (ג) $A\setminus B=\{x\in A\,:\,x\notin B\}$ (הפרדה).
   (ד) $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$, וכו'.
7. **מכפלה קרטזית** $A\times B$ (הפרדה מ $P(P(A\cup B))$).
אפשר גם מהחלפה.
8. **יחס** (בינרי) $R$ על קבוצה $A$: תת־קבוצה $R\subseteq A\times A$.
$aRb$ מציין $(a,b)\in R$.
9. **תחום** של יחס: $\operatorname{dom}(R):=\{a\in A\,:\,\exists b\in A,\, aRb\}$.
10. **תמונה** של יחס: $\operatorname{im}(R):=\{b\in A\,:\,\exists b\in A,\, aRb\}$.
11. **פונקציה:** $f\colon A\to B$ פירושו: $f$ יחס על $A\cup B$, $\operatorname{dom}(f)=A, \operatorname{im}(f)\subseteq B$, ו $f$ חד־ערכית.

### 5.4 לתרגיל ולבית

1. ניסוח, בשפה של תורת הקבוצות, של סכמות ההפרדה ואקסיומת הזוגות.
2. שאלות אפשריות מהספר "החלום של קנטור":
   (א) מפרק א: 4.3 4.2 (עם הבהרה שבתרגילים שמשתמשים בדברים שטרם הגדרנו, על התלמידים להניח כאילו כבר הגדרנו אותם ויש להם התכונות המוכרות להם).
   (ב) 5.1 (בונוס) 5.3, 6.4, 6.5, 7.2, 9.1, 10.1 (כאן פשוט כותבים: $x$ לא ריקה, לכן יש בה איבר $a$. $y$ לא ריקה, לכן יש בה איבר $b$. $z$ לא ריקה, לכן יש בה איבר $c$. נגדיר $f=(x,a),(y,b),(z,c)$. אז $f$ פונקצית בחירה כדרוש (לפרט). הסבירו מדוע זה לא עובד במשפחות אינסופיות של קבוצות: ההוכחה תהפוך לאינסופית באורכה, ודרישה יסודית מהוכחה זה שהיא נגמרת.
   (ג) 10.2, 10.3.
3. משפטון ב ZF: הטענות הבאות שקולות:
   (א) אקסיומת הבחירה: על כל קבוצה של קבוצות לא ריקות יש פונקצית בחירה.
   (ב) קיום קבוצה בוחרת: לכל קבוצה $\mathcal{F}$ של קבוצות לא ריקות זרות זו לזו, יש קבוצה $S$ כך שלכל $A\in\mathcal{F}$ יש ב $S\cap A$ איבר אחד בדיוק.

   הדרכה: ($\Downarrow$) בהנתן $\mathcal{F}$ תהי $f$ פונקצית בחירה על $\mathcal{F}$. ניקח $S=\operatorname{im}(f)$.
   ($\Uparrow$) בהנתן $\mathcal{F}$ תהי $\mathcal{G}=\{\{A\}\times A\,:\,A\in\mathcal{F}\}$. קבוצת בוחרת $S$ עבור $\mathcal{G}$ היא פונקצית בחירה על $\mathcal{F}$.
4. החלום, פרק א: 10.4.

# 6 עיקרון הסדר הטוב

## 6.1 משפט הרטוגס: קיום סודר שלא ניתן לשכן בקבוצה

1. $A \preceq B$ פירושו: יש $f\colon A \to B$ חח"ע.
2. אם $f\colon \alpha \to A$ חד־חד ערכית, אז יש סדר טוב מטיפוס סדר $\alpha$ על $\mathrm{im}(f)$.
3. התכונות הבאות שקולות:

   (א) יש סדר טוב (מטיפוס סדר $\alpha$) על $A$.

   (ב) יש $f\colon \alpha \to A$ חד־חד ערכית ועל (ניסוח אחר: סידרה $(a_\beta \,:\, \beta < \alpha)$ חח"ע ועל של איברי $A$).
4. **משפט Hartogs:** לכל קבוצה $A$ יש סודר $\delta$ כך ש $\delta \not\preceq A$.

   $\{\mathrm{type}(B, <_B) \,:\, B \subseteq A \,\text{well-ordered by}\, <_B\} = \{\alpha \,:\, \alpha \preceq A\}$, ולכן זו קבוצה.

   $\beta := \sup\{\alpha \,:\, \alpha \preceq A\}$. אז $\beta + 1 \not\preceq A$.

## 6.2 סידור טוב של קבוצות

1. **עיקרון הסדר הטוב:** כל קבוצה $A$ ניתן לסדר היטב.

   יהיו $\delta \not\preceq A$, $f$ פונקצית בחירה על $P(A) \setminus \{\emptyset\}$, $b \notin A$.

   נגדיר סידרה $(a_\alpha \,:\, \alpha < \delta)$ של איברים של $A \cup \{b\}$ ברקורסיה: $a_\alpha = f(A \setminus \{a_\beta \,:\, \beta < \alpha\})$ אם הקבוצה לא ריקה, ואחרת $a_\alpha = b$.

   אם אין $a_\alpha = b$, אז הסידרה חח"ע, בסתירה ל $\delta \not\preceq A$.

   יהי $\alpha$ הראשון כך ש $a_\alpha = b$. אז $(a_\beta \,:\, \beta < \alpha)$ חח"ע ועל.
2. * **ZF** תסמן את כל האקסיומות פרט לבחירה.
3. * משפט ב ZF: הטענות הבאות שקולות:

   (א) אקסיומת הבחירה.

   (ב) עקרון הסדר הטוב: לכל קבוצה $A$, יש סדר טוב על $A$.

   ($\Downarrow$)הוכחנו.

   ($\Uparrow$)לכל קבוצה $\mathcal{F}$ של קבוצות לא ריקות, ניקח סדר טוב על איחודן ונגדיר $f(A) := \min A$ לכל $A \in \mathcal{F}$.

# 7 עוצמות ומונים

## 7.1 העוצמה של קבוצה

1. $A \approx B$ אם יש $f\colon A \to B$ חח"ע ועל.
2. $A \preceq B$ אם יש $f\colon A \to B$ חח"ע.
3. $A \prec B$ אם $A \preceq B$ אבל $A \not\approx B$.
4. $|A| := \min\{\alpha : \alpha \approx A\}$.

   הקבוצה מימין לא ריקה, מעקרון הסדר הטוב.

### 7.2 השוואת עוצמות

1. $A \approx B$ אם ורק אם $|A| = |B|$.
2. אם $|B| \leq |A|$ אז $A \preceq B$.
3. הקדמות לכוון ההפוך:
   (א) לכל $A$ סדורה היטב, $|A| \leq \mathrm{type}(A,<)$.
   (ב) אם $f : \alpha \to ON$ עולה ממש ($\beta < \gamma \longrightarrow f(\beta) < f(\gamma)$), אז לכל $\alpha > \gamma$, $f(\gamma) \geq \gamma$.
   באינדוקציה על $\gamma$.
   (ג) אם $F \subseteq \beta$ אז $\mathrm{type}\, F \leq \beta$.
   אילו $\alpha = \mathrm{type}\, F > \beta$ אז $\beta \leq f(\beta) \in F \subseteq \beta$ ולכן $\beta < \beta$.
   (ד) ***יש הוכחה ישירה יותר.
4. סודר $\alpha$ הוא **מונה** אם $\alpha = |\alpha|$.
5. $\alpha$ מונה אם ורק אם יש קבוצה $A$ כך ש $\alpha = |A|$.
6. $A \preceq B$ (אם ו)רק אם $|A| \leq |B|$.
   הוכחה: נסמן $\alpha = |A|\,, \beta = |B|$. אז $\alpha = |\alpha| = |i[\alpha]| \leq \mathrm{type}\, i[\alpha] \leq \beta$.
7. מסקנות:
   (א) $A \prec B$ אם ורק אם $|A| < |B|$.
   (ב) משפט קנטור־ברנשטיין: אם $A \preceq B \preceq A$, אז $A \approx B$.
   (ג) טריכוטומיות השוואת עוצמות: לכל $A, B$, מתקיים בדיוק אחד מהבאים: $A \prec B$ או $A \approx B$ או $B \prec A$.

### 7.3 מונים סופיים ואינסופיים

1. כל מספר טבעי הוא מונה.
   יהי $n$ הראשון כך ש $m := |n| < n$. $0 < n \approx m$, ולכן $n - 1 \approx m - 1$ וממינימלית $n$,
   $$m - 1 = |m - 1| = |n - 1| = n - 1$$
   ולכן $m = n$. סתירה.
2. אם $A \subseteq B$ אז $|A| \leq |B|$ (פונקציית הזהות היא חח"ע). בפרט, אם $\alpha \leq \beta$, אז $|\alpha| \leq |\beta|$.
3. $\omega$ הוא מונה.
   נניח בשלילה ש $|\omega| < \omega$. אז $|\omega| = n$ טבעי, ולכן $n + 1 = |n + 1| \leq |\omega| = n$.
4. $\omega + 1$ אינו מונה: $|\omega + 1| = |1 + \omega| = |\omega| = \omega < \omega + 1$.
5. $A$ סופית אם $|A| < \omega$. אם לא, $A$ אינסופית. $A$ בת מניה אם $|A| \leq \omega$.
6. $\alpha$ אינסופי $\Longleftrightarrow \omega \leq \alpha$.
7. האותיות $\kappa, \lambda, \mu$ יציינו תמיד מונים.

# 8 האלפים של קנטור

## 8.1 מונים עוקבים וגבוליים

1. **משפט קנטור:** $|A| < |P(A)|$.
2. לכל מונה, יש מונה גדול ממנו (מקנטור או מהרטוגס).
3. $\kappa^+ := \min\{\lambda \,:\, \kappa < \lambda\}$.
4. $\kappa$ **מונה עוקב** אם יש $\lambda$ כך ש $\kappa = \lambda^+$.
   $\kappa$ **מונה גבולי** אם $\omega < \kappa$ ו $\kappa$ אינו עוקב.
5. אם $\kappa$ מונה גבולי, אז $\kappa = \sup\{\lambda \,:\, \lambda < \kappa\}$.

## 8.2 האלפים

1. האלפים של קנטור מוגדרים באינדוקציה טרנספיניטית:
   (א) $\aleph_0 = \omega$.
   (ב) $\aleph_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^+$.
   (ג) עבור $\alpha$ גבולי, $\aleph_\alpha = \sup\{\aleph_\beta \,:\, \beta < \alpha\}$.
2. פונקציית המחלקה $\alpha \mapsto \aleph_\alpha$ היא "איזומורפיזם סדר" בין מחלקת הסודרים למחלקת המונים האינסופיים:
   (א) לכל $\alpha < \beta$, $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$.
   באינדוקציה על $\beta$.
   (ב) כל $\aleph_\alpha$ הוא מונה.
   באינדוקציה על $\alpha$.
   (ג) כל מונה אינסופי שווה לאיזשהו $\aleph_\alpha$.
   יהי $\kappa$ המונה האינסופי הראשון שאינו מהצורה הדרושה. $\kappa \neq \aleph_0, \aleph_{\alpha+1}$ ולכן גבולי.
   $\kappa = \sup\{\lambda \,:\, \lambda < \kappa\} = \sup\{\aleph_\beta \,:\, \aleph_\beta < \kappa\}$.
   $\alpha := \{\beta \,:\, \aleph_\beta < \kappa\}$ סודר גבולי: קבוצה $\in$-טרנזיטיבית של סודרים, ולכל $\beta$ בקבוצה, גם $\beta + 1$ בקבוצה.
   $\aleph_\alpha = \sup\{\aleph_\beta \,:\, \beta < \alpha\} = \sup\{\aleph_\beta \,:\, \aleph_\beta < \kappa\} = \kappa$.
3. $\aleph_\alpha$ מונה עוקב $\iff$ $\alpha$ סודר עוקב.
   $\aleph_\alpha$ מונה גבולי $\iff$ $\alpha$ סודר גבולי.

## 8.3 תרגיל

1. אם $|A| = \kappa$, אז הסודר הקטן ביותר $\delta$ כך ש $A \not\preceq \delta$ הוא $\kappa^+$.
2. אם $B$ קבוצה ו $A$ מחלקה המקיימת $A \preceq B$, אז $A$ קבוצה.
3. מחלקת כל המונים היא מחלקה של ממש.

## 9 הלמה של צורן

1. תזכורת: **קבוצה סדורה חלקית** (יחס הסדר הוא אנטיסימטרי וטרנזיטיבי).
2. **שרשרת** בקבוצה סדורה חלקית $A$: תת־קבוצה סדורה קוית $B \subseteq A$.
3. **חסם מלעיל** של תת־קבוצה $B \subseteq A$: איבר $a \in A$ $\leq$ כל אברי $B$.
4. **איבר מקסימלי:** איבר שאין איברים גדולים ממנו.
5. **תנאי צורן** עבור קבוצה סדורה חלקית $A$: $A \neq \emptyset$, ולכל שרשרת של איברים ב $A$ יש חסם מלעיל.
6. **הלמה של צורן:** אם $A$ סדורה חלקית ומקיימת את תנאי צורן, אז יש ב $A$ איבר מקסימלי.
"בונים שרשרת עולה ממש עד שנתקעים באיבר מקסימלי."
יהיו $\kappa := |A|^+$, $f$ פונקציית בחירה על $P(A) \setminus \{\emptyset\}$, $b \notin A$.
נגדיר סידרה $(a_\alpha \,:\, \alpha < \kappa)$ של איברים של $A \cup \{b\}$ ברקורסיה:

$$a_\alpha = \begin{cases} f(A) & \alpha = 0 \\ f(\{a \in A \,:\, a_\beta < a\}) & \alpha = \beta + 1,\, a_\beta \text{ not maximal} \\ f(\{a \in A \,:\, \forall \beta < \alpha,\, a_\beta \leq a\}) & \alpha \text{ limit, } \{a_\beta \,:\, \beta < \alpha\} \text{ bounded} \\ b & \text{otherwise} \end{cases}.$$

אם אין $a_\alpha = b$, אז הסידרה עולה ממש, לכן חח"ע, בסתירה ל $\kappa < |A|$.
יהי $\alpha$ הראשון כך ש $a_\alpha = b$. אז $\alpha$ אינו 0 ואינו גבולי, לכן עוקב, $\alpha = \beta + 1$, ו $a_\beta$ מקסימלי.

### 9.1 לתרגיל ולבית

1. הוכח, בעזרת רקורסיה/אינדוקציה טרנספיניטית, שלכל מרחב וקטורי יש בסיס.
2. תהי $P$ קבוצה סדורה חלקית. קבוצה $A \subseteq P$ היא קופינלית ב $P$ אם לכל $p \in P$ יש $a \in A$ כך ש $p \leq a$. הוכח:
אם $(P, <)$ סדר מלא, אז יש ל $P$ תת־קבוצה קופינלית שהיא סדורה היטב על ידי $<$.
3. כתוב במפורש את פונקציית המחלקה $F(x)$ בה משתמשים בהפעלת משפט הרקורסיה בהוכחת הלמה של צורן.
4. הוכח שבתנאי הלמה של צורן, מספיק לדרוש שלכל תת־קבוצה סדורה היטב של $P$ יש חסם מלעיל.

### 9.2 לתרגיל ולבית

הוכח ב ZF בלי בחירה, את הטענה הבאה: עקרון הטריכוטומיות של השוואת עוצמות (שאומר שלכל $A, B$ מתקיים אחד מבין $A \prec B, A = B, B \prec A$) גורר את עקרון הסדר הטוב (ולכן את אקסיומת הבחירה). רמז: משפט הארטוגס.

הגדרה: פונקציה $f$ היא הפיכה מימין אם יש $g$ כך ש $f \circ g$ היא פו' הזהות. הוכח, בעזרת כל האקסיומות פרט לאקסיומת הבחירה, שהטענות הבאות שקולות: א. כל פונקציה היא הפיכה מימין. ב. אקסיומת הבחירה.

פרק ו: 1.2, ניסוח הלמה של צורן, 4.2, 4.3, 4.4, 4.6 (רק מה שלא עשו בבדידה).

אם חסרים תרגילים, להוסיף תרגילים על הלמה של צורן (בשני העמודים האחרונים של החוברת יש שבע שאלות על הלמה של צורן).

הוכח, מבלי להשתמש באקסיומת הבחירה (או באקסיומות שקולות לה), שהלמה של צורן גוררת את עיקרון הסדר הטוב.

הדרכה: תהי $A$ קבוצה. תהי $\mathcal{F}$ משפחת כל הסדרים הטובים $(B, <_B)$ כך ש $B \subseteq A$. נגדיר סדר חלקי $\prec$ על $\mathcal{F}$ בצורה הבאה: $(B, <_B) \prec (C, <_C)$ אם $(B, <_B)$ הוא רישא של $(C, <_C)$ (כלומר: $B \subseteq C$, $<_C$ מרחיב את $<_B$, ויש $c \in C$ כך ש $B = \overset{c}{C}$).

הוכח ש $\mathcal{F}$ מקיימת את תנאי הלמה של צורן. הסק שיש ב $\mathcal{F}$ איבר מקסימלי $(B, <_B)$. הוכח שאילו היה $a \in A \setminus B$, ניתן היה להרחיב את $<_B$ לסדר טוב $<_{B \cup \{a\}}$ על $B \cup \{a\}$, כך ש $B$ היתה רישא שלו.

## 10 סכום ומכפלת מונים

### 10.1 חיבור מונים

1. חיבור מונים: $\kappa \oplus \lambda := |(\{0\} \times \kappa) \cup (\{1\} \times \lambda)|$.
2. $\kappa \oplus \lambda = |\kappa + \lambda|$ (החיבור מימין הוא של סודרים).
3. $\kappa \oplus \lambda = \lambda \oplus \kappa$.
4. $\omega \oplus 1 = 1 \oplus \omega = |1 + \omega| = |\omega| = \omega < \omega + 1$.

### 10.2 כפל מונים

1. כפל מונים: $\kappa \otimes \lambda := |\kappa \times \lambda|$.
2. $\kappa \otimes \lambda = |\kappa \cdot \lambda|$ (הכפל מימין הוא של סודרים).
3. $\kappa \otimes \lambda = \lambda \otimes \kappa$.
4. $\omega \otimes 2 = 2 \otimes \omega = |2 \cdot \omega| = |\omega| = \omega < \omega \cdot 2$.
5. לכל $m, n$: $m \oplus n = m + n < \omega$, $m \otimes n = m \cdot n < \omega$. (באינדוקציה על $n$.)
6. לכל סודר $\omega \leq \alpha$ מתקיים $1 + \alpha = \alpha$, נשלח $(0,1) \mapsto 0$, $(1,n) \mapsto n+1$, $(1,\beta) \mapsto \beta$ עבור $\omega \leq \beta$.
7. מונה אינסופי אינו סודר עוקב.
8. משפט המכפלה: לכל $\kappa$ אינסופי, $\kappa \otimes \kappa = \kappa$.

   לכל מונה אינסופי $\kappa$, נגדיר סדר על $\kappa \times \kappa$ לפי: $(\alpha, \beta) < (\gamma, \delta)$ אם $\max\{\alpha, \beta\} < \max\{\gamma, \delta\}$, או שהמקסימומים שוים, ובנוסף $(\alpha, \beta) < (\gamma, \delta)$ בסדר המילוני.

   זה סדר טוב על $\kappa \times \kappa$: לקבוצה לא ריקה נתונה, נמזער קודם את המקסימום הנ"ל, ובין אלה עם מקסימום זה, יש איבר ראשון בסדר המילוני (שהוא סדר טוב).

   נראה שעבור סדר טוב זה, $\kappa \times \kappa \cong \kappa$.

   $(\geq)$ $\mathrm{type}(\kappa \times \kappa) \geq |\kappa \times \kappa| \geq \kappa$.

   $(\leq)$ על דרך השלילה, יהי $\kappa$ המונה האינסופי הראשון כך ש $\eta := \mathrm{type}(\kappa \times \kappa) > \kappa$. $\kappa \times \kappa \cong \eta$ ולכן $\kappa$ (שהוא רישא של $\eta$) איזומורפי לרישא $\overset{(\gamma,\delta)}{\kappa \times \kappa}$ של $\kappa \times \kappa$.

   כיון ש $\gamma, \delta < \kappa$, $\epsilon := \max\{\gamma, \delta\} + 1 < \kappa$ , וממינימליות $\kappa$, $|\epsilon| \cong |\epsilon| \otimes |\epsilon|$.

   כיון ש $\overset{(\gamma,\delta)}{\kappa \times \kappa} \subseteq \epsilon \times \epsilon$, $\kappa = \left|\overset{(\gamma,\delta)}{\kappa \times \kappa}\right| \leq |\epsilon \times \epsilon| = |\epsilon| < \kappa$; סתירה.
9. אם $0 < \kappa, \lambda$ ולפחות אחד מהם אינסופי, אז $\kappa \oplus \lambda = \kappa \otimes \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$.
10. אם $\kappa$ אינסופי ולכל $\alpha < \kappa$, $|A_\alpha| \leq \kappa$, אז $\left|\bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha\right| \leq \kappa$.

### 10.3 תרגיל

1. הוכח, ישירות מהגדרת חיבור וכפל מונים, שחיבור וכפל מונים הם קומוטטיביים.
2. אם $\kappa$ אינסופי ולכל $\alpha < \kappa$, $|A_\alpha| \leq \kappa$, אז $\left|\bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha\right| \leq \kappa$.
3. תהי $A^* = \bigcup_{n\in\omega} A^n$ קבוצת כל הסדרות הסופיות של איברים מ $A$. חשב את $|A^*|$ בכל אחד מהמקרים הבאים:

   (א) כאשר $A$ ריקה.

   (ב) כאשר $A$ סופית ולא ריקה.

(ג) כאשר $|A| = \kappa \geq \omega$.

4. משפט 10.23 מהספר של קונן (יש להקדים את הגדרה 10.22 שם).

5. לכל חבורה אינסופית יש תת־חבורה אינסופית בת־מניה.

# 11 חזקות מונים

## 11.1 חזקות מונים

1. $\kappa^\lambda := \left|{}^\lambda\kappa\right|$.

2. $\kappa^{\lambda \oplus \mu} = \kappa^\lambda \otimes \kappa^\mu$.

3. $\left(\kappa^\lambda\right)^\mu = \kappa^{\lambda \otimes \mu}$.

4. $2^\kappa = |P(\kappa)|$.

בעזרת פונקציות אופייניות $\chi_A$ ($A \subseteq \kappa$).

5. לכל $\kappa$ אינסופי, $2^\kappa = \kappa^\kappa$.

$(\geq)$: $2 \approx^{\kappa \times \kappa} P(\kappa \times \kappa) \supseteq {}^\kappa\kappa$ ומשפט המכפלה.

6. ניסוחים נוספים של משפט קנטור:

   (א) $\kappa < 2^\kappa$.

   (ב) $\aleph_{\alpha+1} \leq 2^{\aleph_\alpha}$.

## 11.2 השערת הרצף

1. $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$.

2. $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0} \geq \aleph_1$.

הצגת כל מספר בקטע היחידה הסגור בבסיס 2 כסדרה שאינה אפס לבסוף, ושויון עוצמת הקטע הסגור לקטע הפתוח ולכן ל $\mathbb{R}$.

3. **השערת הרצף** Continuum Hypothesis (CH): $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

ניסוח אלמנטרי: כל קבוצה של מספרים ממשיים היא בת מניה, או שוות גודל ל $\mathbb{R}$ כולו.

4. **השערת הרצף המוכללת** Generalized Continuum Hypothesis (GCH): $(\forall\alpha)\ 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.

# 12 קופינליות וחישוב חזקות תחת GCH

## 12.1 הקופינליות של סודר גבולי

1. יהי $\alpha$ סודר גבולי. פונקציה $f\colon \beta \to \alpha$ היא **קופינלית** אם תמונתה אינה חסומה ב $\alpha$.

שקול: $\sup \operatorname{im}(f) = \alpha$. לכל $\gamma < \alpha$ יש $\delta < \beta$ כך ש $\gamma < f(\delta)$.

2. **הקופינליות** של סודר גבולי $\alpha$, מסומנת $\operatorname{cf}(\alpha)$, היא הסודר המינימלי $\beta$ כך שיש $f\colon \beta \to \alpha$ קופינלית.

3. לכל סודר גבולי $\alpha$, $\operatorname{cf}(\alpha)$ סודר גבולי. בפרט, $\omega \leq \operatorname{cf}(\alpha) \leq \alpha$.

נניח $\operatorname{cf}(\alpha) = \beta + 1$, ותהי $f\colon \operatorname{cf}(\alpha) \to \alpha$ קופינלית. הערך $f(\beta)$ לא תורם לאי־החסימות של התמונה ולכן גם הצימצום $f\colon \beta \to \alpha$ קופינלית. סתירה.

4. לכל סודר גבולי $\alpha$ יש פונקציה קופינלית **עולה** $g\colon \mathrm{cf}(\alpha) \to \alpha$.
בהנתן $f\colon \mathrm{cf}(\alpha) \to \alpha$ קופינלית, נגדיר ברקורסיה על אברי $\mathrm{cf}(\alpha)$: $g(\beta) = \sup\{f(\beta), g(\gamma) : \gamma < \beta\} + 1 < \alpha$.

5. אם $\alpha$ סודר גבולי ויש פונקציה קופינלית עולה $f\colon \beta \to \alpha$, אז $\beta$ גבולי ו $\mathrm{cf}(\alpha) = \mathrm{cf}(\beta)$.
אם $\beta$ עוקב אז תמונת $f$ חסומה על ידי $f(\beta - 1)$.
$(\leq)$ עבור $g\colon \mathrm{cf}(\beta) \to \beta$ קופינלית עולה, $f \circ g\colon \mathrm{cf}(\beta) \to \alpha$ קופינלית (ועולה).
$(\geq)$ עבור $h\colon \mathrm{cf}(\alpha) \to \alpha$ קופינלית עולה, הפונקציה $g\colon \mathrm{cf}(\alpha) \to \beta$ המוגדרת $g(\gamma) := \min\{\delta : f(\delta) > h(\gamma)\}$ היא קופינלית.

6. לכל סודר גבולי $\alpha$, $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha)) = \mathrm{cf}(\alpha)$.

7. כל סודר גבולי $\alpha$ המקיים $\mathrm{cf}(\alpha) = \alpha$ הוא מונה.

8. לכל סודר גבולי $\alpha$, $\mathrm{cf}(\alpha)$ הוא מונה.

## 12.2 מונים רגולרים וסינגולרים

1. מונה אינסופי $\kappa$ הוא **רגולרי** (או: סדיר) אם $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$. מונה אינסופי שאינו רגולרי נקרא **סינגולרי** (או: חריג).

2. לכל סודר גבולי $\alpha$, $\mathrm{cf}(\alpha)$ מונה רגולרי.

3. $\aleph_0$ מונה רגולרי.

4. לכל מונה אינסופי $\kappa$, המונה $\kappa^+$ הוא רגולרי.
אם $\mathrm{cf}(\kappa^+) = \lambda < \kappa^+$ אז $\kappa^+ = \bigcup_{\alpha<\lambda} f(\alpha)$ עבור $f\colon \lambda \to \kappa^+$ קופינלית. אך $\left|\bigcup_{\alpha<\lambda} f(\alpha)\right| \leq \lambda \cdot \kappa < \kappa^+$.

5. $\aleph_1, \aleph_2, \ldots$ מונים רגולרים.

6. $\aleph_\omega$ מונה סינגולרי: $\mathrm{cf}(\aleph_\omega) = \omega$.

7. לכל סודר גבולי $\alpha$, $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) = \mathrm{cf}(\alpha)$.
הפונקציה $f\colon \alpha \to \aleph_\alpha$ המוגדרת $f(\beta) = \aleph_\beta$ היא קופינלית ועולה.

## 12.3 חישוב חזקות בהנחת GCH

1. **משפט קניג:** לכל מונה אינסופי $\kappa$, $\kappa < \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$.
נסמן $\lambda := \mathrm{cf}(\kappa)$ ותהי $f\colon \lambda \to \kappa$ קופינלית ועולה. נראה שלכל קבוצה $\{g_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq {}^\lambda\kappa$ יש $g \in {}^\lambda\kappa$ ששונה מכולן, על ידי שנדאג שלכל $\alpha < \lambda$, $g$ שונה מ $f(\alpha)$ הפונקציות הראשונות בקבוצה.
ניקח $g(\alpha) = \min\left(\kappa \setminus \{g_\beta(\alpha) : \beta < f(\alpha)\}\right)$.

2. לכל $\kappa$ אינסופי, $\kappa < \mathrm{cf}(2^\kappa)$. בפרט, $\aleph_0 < \mathrm{cf}(2^{\aleph_0})$.
$(2^\kappa)^\kappa = 2^\kappa \not> 2^\kappa$.

3. $2^{\aleph_0} \neq \aleph_\omega, \aleph_{\omega+\omega}, \aleph_{\aleph_\omega}, \ldots$.

4. חישוב חזקות מונים **בהנחת GCH**: יהיו $\kappa, \lambda \geq 2$ כך שלפחות אחד מהם אינסופי. אזי $\kappa^\lambda$ מקבל את הערך הקטן ביותר שהוא יכול לקבל לאור הידוע לנו:

$$\kappa^\lambda = \begin{cases} \lambda^+ & \kappa \leq \lambda \\ \kappa^+ & \mathrm{cf}(\kappa) \leq \lambda \leq \kappa \\ \kappa & \lambda < \mathrm{cf}(\kappa) \end{cases}.$$

המקרה הראשון מ GCH. השני מקניג ו GCH.
המקרה $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$: כל פונקציה $f\colon \lambda \to \kappa$ חסומה, ולכן ${}^\lambda\kappa = \bigcup_{\alpha<\kappa} {}^\lambda\alpha$.

5. דוגמאות בהנחת GCH:

$$\begin{aligned} 2^{\aleph_0} &= \aleph_1 \\ \aleph_\omega^{\aleph_0} &= \aleph_{\omega+1} \\ \aleph_\omega^{\aleph_\omega} &= \aleph_{\omega+1} \\ (\aleph_{\aleph_1})^{\aleph_0} &= \aleph_{\aleph_1} \end{aligned}$$

# 13 מבוא לישר הממשי

## 13.1 המספרים השלמים

1. $\omega =: \mathbb{N}$. חיבור, כפל, וסדר מוגדרים על $\omega$.
2. $\mathbb{Z} = \mathbb{N}\times\mathbb{N}/\sim$, כאשר: $(a,b)\sim(c,d) \iff a+d=c+b$. במקום $[(a,b)]$ נכתוב $a-b$.
מזה רואים איך להגדיר פעולות חשבוניות וסדר על $\mathbb{Z}$.
3. אם נכתוב $n$ במקום $n-0$, נקבל שיכון של $\mathbb{N}$ בתוך $\mathbb{Z}$.

## 13.2 המספרים הרציונלים

1. $\mathbb{Q} = \mathbb{Z}\times(\mathbb{N}\setminus\{0\})/\sim$, כאשר: $(a,b)\sim(c,d) \iff ad=cb$. במקום $[(a,b)]$ נכתוב $\frac{a}{b}$.
מזה רואים איך להגדיר פעולות חשבוניות וסדר על $\mathbb{Q}$.
אם נכתוב $n$ במקום $\frac{n}{1}$, נקבל שיכון של $\mathbb{Z}$ בתוך $\mathbb{Q}$.

## 13.3 המספרים הממשיים

1. $\mathbb{R}$ הוא אוסף חתכי הדדקינד (השמאליים) ב $\mathbb{Q}$.
**חתך דדקינד** הוא קבוצה $C \subseteq \mathbb{Q}$ כך ש:
   (א) $C$ חסומה מלעיל ולא ריקה.
   (ב) $C$ סגורה כלפי מטה, כלומר לכל $q \in C$ ולכל רציונלי $p < q$, גם $p \in C$.
   (ג) אין ב $C$ איבר גדול ביותר.

   פעולות חשבוניות וסדר מוגדרים על $\mathbb{R}$ בצורה טבעית.
   אם נכתוב $q$ במקום $\overset{q}{\mathbb{Q}}$, נקבל שיכון של $\mathbb{Q}$ בתוך $\mathbb{R}$.
2. $\mathbb{R}$ מקיים את **תכונת החסם העליון**: לכל קבוצה חסומה לא ריקה יש חסם עליון (חסם מלעיל מינימלי).
בהנתן קבוצה חסומה מלעיל $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}$, $C := \bigcup \mathcal{F}$ חתך דדקינד והוא החסם העליון של $\mathcal{F}$.

# 14 העוצמה של קבוצות פשוטות של ממשיים

## 14.1 קבוצות פרפקטיות

1. $\mathfrak{c} := |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0} \geq \aleph_1$.
2. השערת הרצף (CH): $\mathfrak{c} = \aleph_1$.
שקול: כל קבוצה של ממשיים שאינה בת־מניה היא שוות עוצמה ל $\mathbb{R}$ כולו.

3. לכל קטע פתוח $(a,b)$ ב $\mathbb{R}$, $|(a,b)| = \mathfrak{c}$.
4. **קבוצה פתוחה** ב $\mathbb{R}$: איחוד של משפחה כלשהי של קטעים פתוחים.
5. כל איחוד של משפחה של קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה.
6. לכל קבוצה פתוחה $U$ ב $\mathbb{R}$, $|U| = \mathfrak{c}$.
7. **קבוצה סגורה** ב $\mathbb{R}$: משלים של קבוצה פתוחה.
8. כל חיתוך של משפחה לא ריקה של קבוצות סגורות הוא קבוצה סגורה.
9. **נקודה מבודדת** בקבוצה $X \subseteq \mathbb{R}$: נקודה $x \in X$ כך שיש קטע פתוח $(a,b)$ עם $X \cap (a,b) = \{x\}$.
10. **נקודת גבול/הצטברות** של $X$: נקודה $a \in \mathbb{R}$ (לאו דווקא ב $X$) כך שיש סידרה $x_n$ של איברים ב $X$ השונים מ $a$, עם $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ .
11. $a$ נקודת גבול של $X \iff a$ אינה מבודדת ב $X \cup \{a\}$.
12. $X$ סגורה $\iff$ כל נקודות הגבול של $X$ שייכות ל $X$.
13. **קבוצה פרפקטית:** לא ריקה, סגורה, ובלי נקודות מבודדות.

## 14.2 קבוצת קנטור

1. **קבוצת קנטור** $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$, כאשר $C_0 = [0,1]$ ו $C_{n+1}$ מתקבלת מ $C_n$ על ידי הסרת השליש האמצעי (כקטע פתוח) מכל אחד מהקטעים ב $C_n$.
2. קבוצת קנטור היא:
   (א) סגורה.
   חיתוך סגורות.
   (ב) אינסופית.
   כל קצוות הקטעים שם.
   (ג) בלי נקודות מבודדות.
   לכל נקודה שנמצאת, קצוות הקטעים שלה שואפים אליה.
   (ד) פרפקטית.
   (ה) מידת לבג של $C$ היא 0.
   $\mu(C) \le \mu(C_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ לכל $n$.
3. $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \approx C$ (למעשה, זה הומיאומורפיזם). בפרט, עצמת קבוצת קנטור היא $\mathfrak{c}$.

יהיו $I_0, I_1$ הקטעים הסגורים המתקבלים מהסרת השליש האמצעי של קטע היחידה הסגור $[0,1]$, כך ש $C_1 = I_0 \cup I_1$.

עבור $n > 1$, לכל $i_1, \ldots, i_{n-1} \in \{0,1\}$ נניח שהוגדר הקטע הסגור $I_{i_1,\ldots,i_{n-1}}$. אז $I_{i_1,\ldots,i_{n-1},0}$ ו $I_{i_1,\ldots,i_{n-1},1}$ הם הקטע השמאלי והימני המתקבלים מהסרת השליש האמצעי של $I_{i_1,\ldots,i_{n-1}}$. $C_n = \bigcup_{i_1,\ldots,i_n \in 0,1} I_{i_1,\ldots,i_n}$.

לכל $(i_1, i_2, \ldots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, בחיתוך $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_{i_1,\ldots,i_n}$ יש בדיוק נקודה אחת (חיתוך קטעים סגורים יורדים שאורכם שואף לאפס). נגדיר

$$
\begin{aligned}
F\colon \{0,1\}^{\mathbb{N}} &\to C \\
F(i_1, i_2, \ldots) &\in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{i_1,\ldots,i_n}.
\end{aligned}
$$

### 14.3 העוצמה של קבוצה פרפקטית

1. לכל קבוצה פרפקטית עצמה $\mathfrak{c}$ (למעשה, היא מכילה קבוצה הומיאומורפית לקבוצת קנטור).

בונים בתוכה מעין קבוצת קנטור: תהי $P$ פרפקטית.

ניקח שתי נקודות שונות $x_1, x_2 \in P$ וניקח סביבן קטעים סגורים זרים $I_0, I_1$. אז $P \cap I_0, P \cap I_1$ אינסופיות.

עבור $n > 1$, לכל $i_1, \ldots, i_{n-1} \in \{0,1\}$ נניח שהוגדר הקטע הסגור $I_{i_1,\ldots,i_{n-1}}$ כך ש $P \cap I_{i_1,\ldots,i_{n-1}}$ אינסופית.

ניקח שתי נקודות שונות $x_1, x_2 \in P \cap I_{i_1,\ldots,i_{n-1}}$ וניקח סביבן קטעים סגורים זרים $I_{i_1,\ldots,i_{n-1},0}$ ו $I_{i_1,\ldots,i_{n-1},1}$ שאורכם קטן מ $1/n$. חיתוך כל אחד מהם עם $P$ הוא אינסופי.

לכל $(i_1, i_2, \ldots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, בחיתוך $\bigcap_{n=1}^{\infty} P \cap I_{i_1,\ldots,i_n}$ יש בדיוק נקודה אחת (חיתוך קבוצות קומפקטיות יורדות שקוטרן שואף לאפס). נגדיר

$$
\begin{aligned}
F\colon \{0,1\}^{\mathbb{N}} &\rightarrow P \\
F(i_1, i_2, \ldots) &\in \bigcap_{n=1}^{\infty} P \cap I_{i_1,\ldots,i_n}.
\end{aligned}
$$

$F$ חד־חד ערכית.

### 14.4 תרגיל

1. הוכח: $a$ נקודת גבול של $X \iff a$ אינה מבודדת ב $X \cup \{a\}$.
2. $X$ סגורה אם ורק אם כל נקודות הגבול של $X$ שייכות ל $X$.
3. תהי $X \subseteq \mathbb{R}$. נגדיר: **הנגזרת** של $X$, שתסומן $X'$, היא קבוצת כל נקודות הגבול של $X$. הוכח:
   (א) אם $X$ סגורה, אז $X \supseteq X'$.
   (ב) אם $X \neq \emptyset$ ו $X = X'$, אז $X$ פרפקטית.
4. לכל אחת מהקבוצות הבאות $X$, חשב את $X', X'', X''', X''''$:
   $\mathbb{R}, \emptyset, [a,b], (a,b), \mathbb{Q}, \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}, \left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n,m \in \mathbb{N}\right\}, \left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{k} : n,m,k \in \mathbb{N}\right\}$.
5. לכל $X_1, \ldots, X_k \subseteq \mathbb{R}$: $(X_1 \cup \cdots \cup X_k)' = X_1' \cup \cdots \cup X_k'$.
6. מצא דוגמא נגדית להשערה הבאה: לכל $X_1, X_2, \ldots \subseteq \mathbb{R}$, מתקיים $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n\right)' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n'$.
7. קבוצה $X \subseteq \mathbb{R}$ תיקרא **דיסקרטית** אם כל נקודותיה מבודדות. הוכח:
   (א) לכל קבוצה $X \subseteq \mathbb{R}$, הקבוצה $X \setminus X'$ היא דיסקרטית.
   (ב) כל קבוצה דיסקרטית היא בת־מניה.
8. הוכח שכל סידרה עולה ממש או יורדת ממש $(r_\alpha : \alpha < \beta)$ של מספרים ממשיים, היא בת מניה (כלומר, $\beta < \aleph_1$).
9. (בונוס) **צביעה** של (אברי) קבוצה $A$ ב $n$ צבעים היא פוקנציה $f : A \to \{0, \ldots, n-1\}$. (אנו מזהים את $n$ הצבעים עם המספרים $0, \ldots, n-1$, ואז $f(a) = k$ פירושו "צובעים את $a$ בצבע $k$").

   אומרים ש $M \subseteq A$ היא **מונוכרומטית** עבור צביעה כזאת, אם לכל אברי $M$ אותו צבע.

   נסמן $[\mathbb{R}]^2 = \{\{x,y\} : x, y \in \mathbb{R},\, x \neq y\}$. הוכח שיש צביעה של אברי $[\mathbb{R}]^2$ בשני צבעים, כך שלכל $X \subseteq \mathbb{R}$ שאינה בת מניה, $[X]^2$ אינה מונוכרומטית.

   הדרכה (Sierpinski): נכתוב $\mathbb{R} = \{r_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$. לכל שני סודרים $\alpha < \beta$, נצבע את $\{r_\alpha, r_\beta\}$ בצבע $0$ אם $r_\alpha < r_\beta$, ובצבע $1$ אחרת. היעזר בתרגיל הקודם.

## 15 השערת הרצף עבור קבוצות סגורות

### 15.1 הנגזרת ה $\alpha$ של קבוצה ממשית

1. **הנגזרת** של קבוצת ממשיים, $X'$=קבוצת נקודות הגבול של $X$.
2. $X'$ קבוצה סגורה.
3. אם $X$ סגורה, אז $X \supseteq X'$.
4. אם $X \neq \emptyset$ ו $X = X'$, אז $X$ פרפקטית.
5. **קבוצה דיסקרטית** = שכל נקודותיה מבודדות.
6. $X \setminus X'$ דיסקרטית.
7. כל קבוצה דיסקרטית היא בת־מניה.
8. **הנגזרת** ה $\alpha$ של קבוצת ממשיים, $X^{(\alpha)}$ , $\alpha \geq 1$ מוגדרת:
   (א) $X^{(1)} = X'$;
   (ב) $X^{(\alpha+1)} = (X^{(\alpha)})'$;
   (ג) $X^{(\alpha)} = \bigcap_{1\leq\beta<\alpha} X^{(\beta)}$ לכל סודר גבולי $\alpha$.
9. $X^{(\alpha)}$ קבוצה סגורה.
10. $\alpha \leq \beta$ גורר ש $X^{(\alpha)} \supseteq X^{(\beta)}$.

### 15.2 העוצמה של קבוצה סגורה

1. **משפט קנטור־בנדיקסון:** לכל קבוצה סגורה $X \subseteq \mathbb{R}$ שאינה בת מניה, יש קבוצה פרפקטית $P$ וקבוצה בת מניה $D$, כך ש $X = P \cup D$.

(א) נסמן $X^{(0)} = X$. יש סודר $\alpha < \aleph_1$ כך ש $X^{(\alpha)} = X^{(\alpha+1)}$: נניח שאין כזה. אז לכל $\alpha < \aleph_1$, יש $x_\alpha \in X^{(\alpha)} \setminus X^{(\alpha+1)}$.
(ב) כיון ש $X^{(\alpha+1)}$ קבוצה סגורה, הקבוצה הלא ריקה $\mathbb{R} \setminus X^{(\alpha+1)}$ היא פתוחה, ולכן יש קטע לא ריק עם קצוות רציונלים $(p_\alpha, q_\alpha)$, כך ש

$$x_\alpha \in (p_\alpha, q_\alpha) \subseteq \mathbb{R} \setminus X^{(\alpha+1)}$$

לכן, $(p_\alpha, q_\alpha) \cap X^{(\alpha)} \neq \emptyset$ אבל $(p_\alpha, q_\alpha) \cap X^{(\alpha+1)} = \emptyset$.
לכל $\alpha < \beta < \aleph_1$, $X^{(\beta)} \subseteq X^{(\alpha)}$ ולכן

$$(p_\alpha, q_\alpha) \cap X^{(\beta)} \subseteq (p_\alpha, q_\alpha) \cap X^{(\alpha+1)} = \emptyset \, ,$$

לכן $(p_\alpha, q_\alpha) \cap X^{(\beta)} = \emptyset$, בעוד ש $(p_\beta, q_\beta) \cap X^{(\beta)} \neq \emptyset$. לכן, $(p_\alpha, q_\alpha) \neq (p_\beta, q_\beta)$. לכן, הפונקציה $f : \aleph_1 \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ המוגדרת $f(\alpha) = (p_\alpha, q_\alpha)$ היא חח"ע, בסתירה לכך ש $|\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}| = \aleph_0$.
(ג) יהי איפוא $\rho = \min\{\alpha : X^{(\alpha)} = X^{(\alpha+1)}\} < \aleph_1$.
(ד) $X = \left(\bigcup_{\alpha<\rho} X^{(\alpha)} \setminus X^{(\alpha+1)}\right) \cup X^{(\rho)}$.
(ה) לכל $\alpha < \rho$, הקבוצה $X^{(\alpha)} \setminus X^{(\alpha+1)}$דיסקרטית ולכן בת מניה. כיון ש $\rho$ בן מניה, הקבוצה $D = \bigcup_{\alpha<\rho} X^{(\alpha)} \setminus X^{(\alpha+1)}$ בת מניה.
(ו) כיון ש $X$ אינה בת מניה, הקבוצה $X^{(\rho)}$ אינה ריקה. מבחירת $\rho$, $X^{(\rho)} = X^{(\rho+1)}$ ולכן הקבוצה $P = X^{(\rho)}$ פרפקטית.

### 15.3 האם השערת הרצף נכונה?

1. סקירה על CH:

(א) הראשונה מבין 32 הבעיות הפתוחות שהילברט הציג בשנת 1900 בתור הבעיות המתמטיות החשובות של המאה ה־20.

(ב) קורט גדל (1937): יש מחלקה של קבוצות, שמקיימת את ZFC+CH. לכן, לא ניתן להוכיח את $\neg$CH.

(ג) פול כהן (1963): יש מחלקה של קבוצות, שמקיימת את ZFC+$\neg$CH. לכן, לא ניתן להוכיח את CH. פיתח לשם כך את שיטת האילוץ (Forcing).

2. הנימוק של פריילינג למה השערת הרצף "אינה נכונה": זריקת חיצים אקראיים על $[0,1]$.

נמספר $[0,1] = \{x_\alpha \,:\, \alpha < \mathfrak{c}\}$. לכל $r \in [0,1]$ יהי $f(r) := \alpha$ כך ש $r = x_\alpha$. עבור $r, s \in [0,1]$ אקראיים, הסיכוי ש $f(s) \leq f(r)$ הוא אפס (אם נחשוב ש $s$ נבחר אחרי $r$). מסימטריה, הסיכוי ש $f(r) \leq f(s)$ גם הוא אפס. "סתירה".

### 15.4 לתרגיל

תיאור ההירכיה של קבוצות בורל (החלק הראשון במאמר של ויקיפדיה על Borel hierarchy), הוכחה בעזרת הירכיה זו שיש לכל היותר (ולכן בדיוק) $\mathfrak{c}$ קבוצות בורל.

## 16 הפתעות גיאומטריות

### 16.1 קבוצות במישור שהן גדולות על כל הקוים המאונכים וקטנות על כל הקוים אופקיים

"תנין הוא יותר ירוק מאשר ארוך, כי הוא ירוק גם לאורך וגם לרוחב"

1. **ישר אנכי** במישור הוא קבוצה מהצורה $\ell = \{x\} \times \mathbb{R}$ ($x \in \mathbb{R}$).
**ישר אופקי** במישור הוא קבוצה מהצורה $\ell = \mathbb{R} \times \{y\}$ ($y \in \mathbb{R}$).

2. תזכורת: $|A| = \kappa$ פירושו שיש מניה חד־חד ערכית $A = \{a_\alpha \,:\, \alpha < \kappa\}$.

3. **הפתעה 1:** יש $A \subseteq \mathbb{R}^2$ כך ש:

(א) לכל ישר אנכי $\ell$, $|A \cap \ell| = \mathfrak{c}$ (יתר על כן, $|\ell \setminus A| < \mathfrak{c}$).

(ב) לכל ישר אופקי $\ell$ , $|A \cap \ell| < \mathfrak{c}$.

הוכחה: נמנה את הממשיים בצורה חח"ע: $\mathbb{R} = \{x_\alpha \,:\, \alpha < \mathfrak{c}\}$. ניקח $A = \{(x_\alpha, x_\beta) \,:\, \alpha < \beta\}$.

4. **מסקנה** (שרפינסקי): CH שקולה לקיום קבוצה במישור, שחיתוכה עם כל ישר אופקי הוא בן מניה, וחיתוך **המשלים שלה** עם כל ישר אנכי הוא בן מניה.

הוכחת הכיוון הנותר: נניח $\mathfrak{c} > \aleph_1$. ניקח $Y \subseteq \mathbb{R}$ עם $|Y| = \aleph_1$, ותהי $P := \{x \,:\, \exists y \in Y,\, (x,y) \in A\}$ ההיטל של $A$ על ציר $x$. אז

$$|P| \leq \left| \bigcup_{y \in Y} (\mathbb{R} \times \{y\}) \cap A \right| \leq |Y| \cdot \aleph_1 = \aleph_1 < \mathfrak{c}$$

ולכן יש $a \notin P$. אז $\{a\} \times Y$ זרה ל $A$ ולכן $|A^c \cap (\{a\} \times \mathbb{R})| \geq |\{a\} \times Y| = \aleph_1$. סתירה.

5. קבוצה $D \subseteq \mathbb{R}$ היא **צפופה** אם לכל קטע פתוח לא ריק $(a,b)$, $D \cap (a,b) \neq \emptyset$.

6. **הפתעה 2:** יש $A \subseteq \mathbb{R}^2$ כך ש:

(א) לכל ישר אנכי $\ell$, $A \cap \ell$ צפופה ב $\ell$.

(ב) לכל ישר אופקי $\ell$ , $|A \cap \ell| \leq 1$ (אפשר לדרוש שויון).

הוכחה: ניקח מניה $\{I_\alpha = \{x_\alpha\} \times (a_\alpha, b_\alpha) \,:\, \alpha < \mathfrak{c}\}$, של כל הקטעים $\{x\} \times (a,b)$ על ישרים אנכיים $\{x\} \times \mathbb{R}$.

לכל $\alpha < \mathfrak{c}$, ניקח $(x_\alpha, y_\alpha) \in (\{x_\alpha\} \times (a_\alpha, b_\alpha)) \setminus (\mathbb{R} \times \{y_\beta \,:\, \beta < \alpha\})$. הקבוצה $A = \{(x_\alpha, y_\alpha) \,:\, \alpha < \mathfrak{c}\}$ היא כדרוש.

7. אם $A$ קבוצה אינסופית ו $\kappa = |A|$, אז יש מניה $A = \{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$, כך שכל $a \in A$ מופיע במניה $\kappa$ פעמים ($|\{\alpha < \kappa \,:\, x_\alpha = a\}| = \kappa$).

הוכחה: הסיבה היא, ש $\kappa \cdot \kappa = \kappa$: תהי $f : \kappa \times \kappa \to \kappa$ חח"ע ועל. לכל $\beta < \kappa$, נסמן $I_\beta = f[\{\beta\} \times \kappa]$. אזי $\bigcup_{\beta<\kappa} I_\beta = \kappa$, חלוקה של $\kappa$ ל $\kappa$ קבוצות זרות מעצמה $\kappa$.

נקבע מספור חח"ע $A = \{a_\beta \,:\, \beta < \kappa\}$. את הסידרה $x_\alpha$ נגדיר כך: לכל $\beta < \kappa$, הסידרה קבועה על $I_\beta$ וערכה עליה הוא $a_\beta$, בפירוט:

לכל $\alpha$, יהי $\beta < \kappa$ הסודר היחיד כך ש $\alpha \in I_\beta$. נגדיר $x_\alpha = a_\beta$.

8. **הפתעה 3:** יש $A \subseteq \mathbb{R}^2$ כך ש:

(א) לכל קטע פתוח $I$ על כל ישר אנכי $\ell$, $|A \cap I| = \mathfrak{c}$.

(ב) לכל ישר אופקי $\ell$ , $|A \cap \ell| \leq 1$.

הוכחה: ניקח מניה $\{I_\alpha \,:\, \alpha < \mathfrak{c}\}$, של הקטעים האנכיים, כך שכל קטע אנכי מופיע בה $\mathfrak{c}$ פעמים.

לכל $\alpha < \mathfrak{c}$, ניקח $(x_\alpha, y_\alpha) \in I_\alpha \setminus (\mathbb{R} \times \{y_\beta \,:\, \beta < \alpha\})$. הקבוצה $A = \{(x_\alpha, y_\alpha) \,:\, \alpha < \mathfrak{c}\}$ היא כדרוש.

## 16.2 קבוצה שחותכת כל ישר בשתי נקודות

1. **הפתעה (**שירפינסקי**):** יש $A \subseteq \mathbb{R}^2$ שחותכת כל ישר (בכל זוית) בשתי נקודות בדיוק.

הוכחה: נמנה את כל הישרים $\{\ell_\alpha \,:\, \alpha < \mathfrak{c}\}$. הבניה היא באינדוקציה על $\alpha < \mathfrak{c}$, וכוללת הנחת אינדוקציה שיש להוכיח שממשיכה להתקיים לאחר כל צעד. לכל $\alpha$, נבחר לכל היותר שתי נקודות חדשות, כך שבשלב $\alpha$ יהיו לנו לכל היותר $|\alpha| < \mathfrak{c}$ נקודות.

בשלב $\alpha = 0$ נבחר שתי נקודות על $\ell_0$.

שלב $\alpha > 0$: תהי $A$ קבוצת הנקודות שבחרנו עד כה, ונניח באינדוקציה ש $A$ אינה מכילה 3 נקודות על אותו ישר.

אם $|A \cap \ell_\alpha| = 2$, לא נבחר נקודות חדשות.

המקרה $|A \cap \ell_\alpha| < 2$: תהי $\mathcal{F}$ משפחת כל הישרים עם שתי נקודות ב $A$ (אז $\ell_\alpha \notin \mathcal{F}$). $|\mathcal{F}| \leq |A|^2 < \mathfrak{c}$, ולכן

$$\left|\ell_\alpha \setminus \bigcup \mathcal{F}\right| = \mathfrak{c}$$

ואפשר לבחור מ $\ell_\alpha \setminus \bigcup \mathcal{F}$ נקודה (אם $|A \cap \ell_\alpha| = 1$) או שתיים (אם $|A \cap \ell_\alpha| = 0$) ולהוסיפה ל $A$. עדיין אין שלש נקודות על ישר (בדוק!).

תהי $A$ קבוצת כל הנקודות שבחרנו. משימור הנחת האינדוקציה לאורך הבניה, אין ב $A$ שלש נקודות על אותו ישר.

מצד שני, לכל ישר $\ell_\alpha$, בשלב $\alpha$ וידאנו ש$A$חותכת אותו בלפחות שתי נקודות ולכן בדיוק בשתי נקודות.

## 16.3 מעגלים זרים

1. לא ניתן לשכן ב $\mathbb{R}^2$ יותר מ $\aleph_0$ צורות זרות הומיאומורפיות ל 8.

2. **מעגל** פירושו מעגל מרדיוס חיובי.

3. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ הוא איחוד של $\mathfrak{c}$ מעגלים זרים.

4. $\mathbb{R}^2$ אינו איחוד של מעגלים זרים.

הוכחה: נניח ש $\mathbb{R}^2 = \bigcup \mathcal{F}$ איחוד משפחה של מעגלים זרים.

ניקח $C_0 \in \mathcal{F}$, נאמר שמרכזו $p_0$ ורדיוסו $r_0$. באינדוקציה, לכל $n$ נבחר $C_n \in \mathcal{F}$ כך שהמרכז של המעגל הקודם מקיים $p_{n-1} \in C_n$.

הרדיוס $r_n$ של $C_n$ קטן מ $r_{n-1}/2$. לכן $r_n < r_0/2^n$ ולכן מרכזי המעגלים סדרת קושי ולכן מתכנסת לנקודה $p$.

ניקח $C \in \mathcal{F}$ כך ש $p \in C$ ונניח שרדיוסו $r$. אז עבור $r_n < r$, בהכרח $C_n$ חותך את $C$, סתירה.

5. **הפתעה:** $\mathbb{R}^3$ הוא איחוד של מעגלים זרים. (אפשר גם ברדיוס 1)

הוכחה: נמספר $\mathbb{R}^3 = \{p_\alpha \,:\, \alpha < \mathfrak{c}\}$. בשלב $\alpha < \mathfrak{c}$, נניח באינדוקציה שכבר בחרנו מעגלים זרים $\{C_\beta \,:\, \beta < \alpha\}$ כך ש $\{p_\beta \,:\, \beta < \alpha\} \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} C_\beta$.

אם נתבונן בישר, החיתוך שלו עם כל מעגל הוא לכל היותר שתי נקודות, ולכן חיתוכו עם $\bigcup_{\beta<\alpha} C_\beta$ הוא מעצמה קטנה מ $\mathfrak{c}$. בפרט, בשלב זה $\bigcup_{\beta<\alpha} C_\beta \neq \mathbb{R}^3$.

תהי $\alpha \geq \gamma_\alpha = \min\left\{\gamma \,:\, p_\gamma \notin \bigcup_{\beta<\alpha} C_\beta\right\}$. נסמן $p = p_{\gamma_\alpha}$. נבחר מישור ש $p$ שייך לו ונסובב אותו כך שהמישור אינו מכיל אף מעגל $C_\beta$ $(\beta < \alpha)$. אפשרי כי יש פחות מ $\mathfrak{c}$ מעגלים ויש $\mathfrak{c}$ זויות סיבוב. אז כל מעגל חותך את המישור בלכל היותר שתי נקודות, שאינן $p$.

נקבע ישר במישור ש $p$ שייך לו. יש $\mathfrak{c}$ מעגלים משיקים לישר זה ב $p$ וזרים פרט לכך, וכל אחד מכיל לכל היותר שתי נקודות ממעגל $C_\beta$, ולכן אחד מהם זר לכל המעגלים $C_\beta$ $(\beta < \alpha)$. נקרא לו $C_\alpha$. הנחת האינדוקציה נשמרת.

לאחר $\mathfrak{c}$ צעדים, קיבלנו מעגלים זרים שמכילים את $\mathbb{R}^3 = \{p_\alpha \,:\, \alpha < \mathfrak{c}\}$.

## 17 בעיית המידה של לבג

מרשימות נפרדות.