הוכחת משפט הרקורסיה

בועז צבאן

1 בנובמבר 2018

1 משפט הרקורסיה

תזכורת:

1. פונקציות f, g הן **מתיישבות** אם לכל $x \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$, $f(x) = g(x)$.
2. f **מרחיבה** את g אם $g \subseteq f$. שקול: $g = f|_{\mathrm{dom}(g)}$.
3. **הרחבה של פונקציות:** תהי $\mathcal{F}$ קבוצה של פונקציות. $g := \bigcup \mathcal{F}$ פונקציה $\iff$ הפונקציות ב $\mathcal{F}$ מתיישבות.

משפט (רקורסיה על אברי סודר δ): לכל פונקציית מחלקה $F : V \to V$, יש פוקנציה יחידה g שתחומה δ, כך ש:

$$\forall \alpha < \delta,\ g(\alpha) = F((g(\beta)\ :\ \beta < \alpha)).$$

הוכחת משפט הרקורסיה

עבור סודר δ, פונקציה g המקיימת את האמור במשפט תיקרא פונקציה δ־טובה.

יחידות:

יהיו g_1, g_2 פונקציות δ־טובות. נוכיח שהן שוות, באינדוקציה על α.

יהי α סודר קטן מ δ. הנחת האינדוקציה היא שלכל הסודרים β הקטנים מ α מתקיים $g_1(\beta) = g_2(\beta)$. עלינו להוכיח שגם $g_1(\alpha) = g_2(\alpha)$. אכן, מהנתון,

$$g_1(\alpha) = F((g_1(\beta)\ :\ \beta < \alpha)) = F((g_2(\beta)\ :\ \beta < \alpha)) = g_2(\alpha).$$

למעשה, הטיעון הזה מראה שאם $\eta \leq \delta$ שני סודרים, והפונקציהg_1 היא δ־טובה, והפונקציה g_2 היא η־טובה, אז $g_1 \subseteq g_2$ (כיון שהן מתלכדות על כל הסודרים $\alpha < \delta$, ואלה מהוים את תחום הפונקציה g_1). נשתמש בידע זה בחלק הבא של ההוכחה.

קיום:

נניח בשלילה שיש סודר שהמשפט אינו נכון עבורו. יהי δ הסודר הראשון כך שאין פונקציה δ־טובה. נבחן את האפשרויות עבור הסודר δ.

$\delta = 0$: נגדיר $g(0) := F(0)$, וקיבלנו פונקציה g שהיא 0־טובה, סתירה.

$\delta = \gamma + 1$ (סודר עוקב): כיון שהסודר γ קטן מהסודר δ, קיימת פונקציה γ־טובה g. נגדיר פונקציה $\tilde{g}$ שתחומה δ, בצורה הבאה:

$$\tilde{g}(\alpha) := \begin{cases} g(\alpha) & \alpha < \gamma \\ F((g(\beta)\ :\ \beta < \gamma)) & \alpha = \gamma \end{cases}.$$

אזי הפונקציה $\tilde{g}$ היא δ־טובה (כלל הרקורסיה מתקיים עבור $\alpha < \delta$ כיון שהפונקציה g היא γ־טובה, ועבור $\alpha = \gamma$ הוא מתקיים משום שכך הגדרנו את $\tilde{g}(\gamma)$). שוב סתירה.

δ סודר גבולי: לכל סודר $\gamma < \delta$, יש פונקציה γ־טובה g. ניקח $g := \bigcup_{\gamma<\delta} g_\gamma$ (ההרחבה המשותפת של כל הפונקציות g_γ, $\gamma < \delta$).
כיון שהסודר δ גבולי, נקבל

$$\mathrm{dom}(g) = \bigcup_{\gamma<\delta} \mathrm{dom}(g_\gamma) = \bigcup_{\gamma<\delta} \gamma = \sup\{\gamma : \gamma < \delta\} = \delta.$$

נותר להראות שתנאי הרקורסיה מתקיים. יהי $\alpha < \delta$. כיון שהסודר δ גבולי, יש סודר γ כך ש $\alpha < \gamma < \delta$ (למשל, $\gamma := \alpha + 1$). אזי

$$g(\alpha) = g_\gamma(\alpha) = F((g_\gamma(\beta) \,:\, \beta < \alpha)) = F((g(\beta) \,:\, \beta < \alpha)).$$

סוף ההוכחה.

משפט (רקורסיה על כל הסודרים): לכל פונקציית מחלקה $F \colon V \to V$, יש פוקנצית מחלקה יחידה $G \colon ON \to V$ כך ש:

$$\forall \alpha,\ G(\alpha) = F((G(\beta) \,:\, \beta < \alpha)).$$

הוכחה: לכל α, תהי $g_{\alpha+1}$ הפונקציה מהמשפט הקודם, עבור $\delta = \alpha + 1$. נגדיר $G(\alpha) = g_{\alpha+1}(\alpha)$ לכל α. לכל סודר α, כיון שכל הפונקציות מתיישבות (כמו שהוכחנו בהוכחה הקודמת), מתקיים:

$$G(\alpha) = g_{\alpha+1}(\alpha) = F((g_{\alpha+1}(\beta) \,:\, \beta < \alpha)) = F((g_{\beta+1}(\beta) \,:\, \beta < \alpha)) = F((G(\beta) \,:\, \beta < \alpha)).$$

סוף ההוכחה.

2 בונוס

נראה כעת, בצורה מפורטת, איך אפשר להגדיר את פונקציית החזקה $G(\alpha) = \gamma^\alpha$ בעזרת משפט הרקורסיה. אנו מעוניינים לקבל:

1. $\alpha^0 := 1$.
2. $\alpha^{\beta+1} := \alpha^\beta \cdot \alpha$.
3. עבור β גבולי: $\alpha^\beta := \sup\{\alpha^\gamma \,:\, \gamma < \beta\}$.

כל שעלינו לעשות הוא להגדיר את הכלל (פונקציית המחלקה) F כך שיתאים לדרישות הנ"ל:

$$F(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ x_\alpha \cdot \gamma & x \text{ is an } \alpha+1\text{-sequence of ordinals: } (x_\beta \,:\, \beta < \alpha+1) \\ \sup\{x_\beta \,:\, \beta < \alpha\} & x \text{ is an } \alpha\text{-sequence of ordinals}, \alpha \text{ limit: } x = (x_\beta \,:\, \beta < \alpha) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ממשפט הרקורסיה, יש G יחידה עבור F זו, ונוכל לסמן $\gamma^\alpha := G(\alpha)$.

כעת אפשר להוכיח, באינדוקציה קלה על α, שמתקיימות הדרישות הנ"ל.