משפטים בסיסיים על האלפים של קנטור

בועז צבאן

15 בנובמבר 2018

משפט 0.1 כל מונה אינסופי שווה לאיזשהו $\aleph_\alpha$.

הוכחה: הוכחה: יהי κ המונה האינסופי הראשון שאינו שווה לאף $\aleph_\alpha$.

בפרט, $\kappa \neq \aleph_0$, כלומר $\aleph_0 < \kappa$.

אם $\kappa = \lambda^+$ מונה עוקב, אז ממינימליות κ, יש α כך ש $\lambda = \aleph_\alpha$, ואז $\kappa = \lambda^+ = (\aleph_\alpha)^+ = \aleph_{\alpha+1}$, בסתירה להגדרת κ.

לכן, κ מונה גבולי, ולכן $\kappa = \sup\{\lambda : \lambda < \kappa\}$. ממינימליות κ, כל מונה קטן מ κ הוא מהצורה $\aleph_\beta$, ולכן $\kappa = \sup\{\aleph_\beta : \aleph_\beta < \kappa\}$.

הקבוצה $\{\beta : \aleph_\beta < \kappa\}$ היא קבוצת סודרים. נראה שהיא $\in$־טרנזיטיבית:

יהי β בקבוצה (כלומר, $\aleph_\beta < \kappa$), ויהי $\gamma \in \beta$. אז $\gamma < \beta$, ולכן $\aleph_\gamma < \aleph_\beta$, ולכן גם γ שייך לקבוצה.

לכן, הקבוצה $\alpha := \{\beta : \aleph_\beta < \kappa\}$ היא סודר.

α סודר גבולי: לכל $\beta < \alpha$ $(\beta \in \alpha)$, מההגדרה $\aleph_\beta < \kappa$ וכיון ש κ מונה גבולי, גם $\aleph_{\beta+1} = (\aleph_\beta)^+ < \kappa$, ולכן גם $\beta + 1 \in \alpha$, כלומר $\beta + 1 < \alpha$.

לכן, $\kappa = \sup\{\aleph_\beta : \aleph_\beta < \kappa\} = \sup\{\aleph_\beta : \beta < \alpha\} = \aleph_\alpha$. סתירה.

■

משפט 0.2 לכל סודר α:

1. $\aleph_\alpha$ מונה עוקב $\iff$ α סודר עוקב.
2. $\aleph_\alpha$ מונה גבולי $\iff$ α סודר גבולי.

הוכחה: **(1)** $(\Rightarrow)$ מיידי מההגדרה.

$(\Leftarrow)$ נניח $\aleph_\alpha = \kappa^+$ לאיזשהו מונה κ. ניקח β כך ש $\kappa = \aleph_\beta$. אז $\aleph_\alpha = (\aleph_\beta)^+ = \aleph_{\beta+1}$. מחד־חד ערכיות פונקציית האלף, $\alpha = \beta + 1$.

(2) נובע מ (1), כיון שמונה הוא גבולי אם ורק אם הוא גדול מ $\aleph_0$ ואינו עוקב. ■