תקציר הרצאות בנושא העתקות לינאריות

בועז צבאן

28 באוקטובר 2012

בכל הקורס, אם לא יצויין אחרת, $\mathbb{F}^n := \mathbb{F}^{n\times 1}$, כלומר איבריו הם וקטורי עמודה.

1 העתקות לינאריות

קצרנות: האותיות הבאות, עם או בלי אינדקסים, יציינו תמיד את סוג האובייקטים הכתוב לידן:

α, β, γ - סקלרים בשדה הרלוונטי.

v, u, w - וקטורים במרחב הוקטורי הרלוונטי.

V, W - מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$.

T, R - העתקות לינאריות (מ V ל W, אם לא צויין אחרת).

A מטריצה ב $\mathbb{F}^{m\times n}$ (אלא אם צויין אחרת).

1. **העתקה לינארית** $T: V \to W$: שומרת על סכומים ועל כפל בסקלר.
2. דוגמאות להעתקות לינאריות $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:
   (א) **מתיחה** (כפל בסקלר).
   (ב) **סיבוב** בזוית קבועה סביב הראשית.
   (ג) **שיקוף** סביב ישר העובר בראשית.
   (ד) **הטלה** על אחד הצירים (או על ישר כלשהו העובר בראשית).
3. עוד דוגמאות:
   (א) $\mathrm{tr}: \mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{F}$, פונקצית העיקבה $\mathrm{tr}(A) := a_{11} + \cdots + a_{nn}$.
   (ב) שיחלוף $(\ )^t: \mathbb{F}^{m\times n} \to \mathbb{F}^{n\times m}$.
4. פונקצית הדטרמיננטה היא העתקה לינארית בכל אחת מהשורות (ובכל אחת מהעמודות).
   אך היא אינה העתקה לינארית על $\mathbb{F}^{n\times n}$.
5. תהי $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$. ההעתקה $L_A: \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ של **כפל משמאל במטריצה** A, $L_A(v) := Av$, היא לינארית.
   גם **כפל מימין** במטריצה קבועה היא העתקה לינארית.
   אך הפונקציה $f(v) := Av + b$ אינה העתקה לינארית כאשר $b \neq \vec{0}$.
6. תרגיל: מצא 4 מטריצות $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ כך ש L_A היא ההעתקה של: מתיחה פי 2, סיבוב שמאלה ב $90°$, שיקוף סביב הישר $y = x$, הטלה על ציר ה x.
7. העתקות לינאריות מיוחדות:
   (א) **העתקת האפס** $O: V \to W$: $O(v) = \vec{0}$ לכל v.
   (ב) **העתקת הזהות** $I: V \to V$: $I(v) = v$ לכל v.
8. T לינארית אם ורק אם $T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$ לכל α, β, u, v.
9. $T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k) = \alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_k T(v_k)$.
10. סימון מקוצר: Tv פירושו $T(v)$.
11. $T(\vec{0}) = \vec{0}$.

12. אם $v_1,\dots,v_k$ תלויים לינארית, אז גם $Tv_1,\dots,Tv_k$ תלויים לינארית.
ההיפך אינו נכון.

13. ניסוח שקול: אם $Tv_1,\dots,Tv_k$ בלתי תלויים לינארית, אז גם $v_1,\dots,v_k$ בלתי תלויים לינארית.

14. אם T **חד־חד ערכית**: $v_1,\dots,v_k$ תלויים לינארית $\Leftrightarrow$ $Tv_1,\dots,Tv_k$ תלויים לינארית.

15. אם $T,R\colon V\to W$ ומתלכדות על בסיס, אז $T=R$.

16. **משפט ההגדרה של העתקה לינארית:** לכל בסיס $v_1,\dots,v_n$ של V, ולכל $w_1,\dots,w_n\in W$, יש העתקה לינארית יחידה $T\colon V\to W$ המקיימת $Tv_i=w_i$ לכל i.
קיום: לכל $v\in V$, נציג $v=\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n$ ונגדיר $T(v)=\alpha_1w_1+\dots+\alpha_nw_n$.

17. מסקנה: לכל $v_1,\dots,v_k\in V$ בלתי תלויים לינארית, ולכל $w_1,\dots,w_k\in W$, יש העתקה לינארית $T\colon V\to W$ המקיימת $Tv_i=w_i$ לכל i.
משלימים לבסיס $v_1,\dots,v_k,\dots,v_n$ של V, ולוקחים $w_1,\dots,w_k,\dots,w_n=w_1,\dots,w_k,\vec{0},\dots,\vec{0}$ במשפט ההגדרה.

2 גרעין, תמונה, ומשפט הדרגה

1. **התמונה** של העתקה לינארית $T\colon V\to W$: $\operatorname{im}(T):=\{Tv\,:\,v\in V\}$.
2. $\operatorname{im}(T)$ תת־מרחב של W.
3. **הגרעין** של העתקה לינארית $T\colon V\to W$: $\ker(T):=\left\{v\in V\,:\,Tv=\vec{0}\right\}$.
4. $\ker(T)$ תת־מרחב של V.
5. T חד־חד ערכית $\Leftrightarrow$ $\ker(T)=\left\{\vec{0}\right\}$.
6. דוגמאות: חישוב גרעין ותמונה של I,O ושל הטלה על ציר x.
7. **משפט הדרגה:** $\dim\ker T=\dim\operatorname{dom}T-\dim\operatorname{im}T$, כלומר: $\dim\ker T+\dim\operatorname{im}T=\dim V$.
לוקחים בסיס של $\ker T$ ומשלימים לבסיס של V. התמונה של הוקטורים שנוספו היא בסיס של $\operatorname{im}T$.
8. מסקנה: אם $\dim V=\dim W$ (בפרט, אם $V=W$), אז העתקה לינארית $T\colon V\to W$ היא חד־חד ערכית $\Leftrightarrow$ היא על.
9. $\dim N(A)=n-\operatorname{rank}A$. ($N(A):=\left\{v\in\mathbb{F}^n\,:\,Av=\vec{0}\right\}$, **מרחב האפס** של המטריצה A.)

3 איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים, מרחב ההעתקות הלינאריות, והצגתו כמרחב המטריצות

1. T **הפיכה** אם T חד־חד ערכית ועל.
2. אם $T\colon V\to W$ העתקה לינארית הפיכה, אז $T^{-1}\colon W\to V$ העתקה לינארית.
3. V **איזומורפי** ל־W ($V\cong W$) אם יש העתקה לינארית הפיכה $T\colon V\to W$.
4. דוגמא: $\mathbb{F}_n[x]\cong\mathbb{F}^{n+1}$.
$a_0+a_1x+\dots+a_nx^n\mapsto(a_0,a_1,\dots,a_n)$.
5. איזומורפיזם מעביר בסיס לבסיס, קבוצה בת״ל לקבוצה בת״ל, קבוצה פורשת לקבוצה פורשת, וכו'.
6. תזכורת: יהי $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס סדור של מרחב וקטורי V. לכל $v\in V$, יש הצגה יחידה $v=\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n$, ומגדירים $[v]_B:=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ (מקדמי הצגת v לפי הבסיס B).
7. הפונקציה $[\ ]_B\colon V\to\mathbb{F}^n$ היא איזומורפיזם.
8. $V\cong\mathbb{F}^n$ כאשר $n=\dim V$.
9. מסקנה: $V\cong W$ $\Leftrightarrow$ $\dim V=\dim W$.
10. **חיבור העתקות לינאריות** $T,R\colon V\to W$: $(T+R)(v):=T(v)+R(v)$.
11. $T+R\colon V\to W$ היא העתקה לינארית.
12. **כפל סקלר בהעתקה לינארית:** $(\alpha T)(v):=\alpha\cdot T(v)$.
13. $\alpha T\colon V\to W$ היא העתקה לינארית.

14. תכונות מיידיות:

(א) $T+R=R+T$.

(ב) $T+O=O+T=T$.

(ג) תהי $-T:=(-1)\cdot T$. אז $T+(-T)=-T+T=O$.

(ד) וכולי.

15. $\operatorname{Hom}(V,W)$ קבוצת כל ההעתקות הלינאריות $T\colon V\to W$.

16. $\operatorname{Hom}(V,W)$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$.

17. **ההצגה של העתקה לינארית** $T\colon V\to W$ לפי בסיסים $E=\{v_1,\dots,v_n\}$ של V, $F=\{w_1,\dots,w_n\}$ של W כמטריצה, היא

$$[T]_F^E := \left([Tv_1]_F,\dots,[Tv_n]_F\right)\in\mathbb{F}^{m\times n}\,.$$

אם ברור מיהם E,F, לא נציין אותם בסימון ונכתוב בקצרה $[T]=([Tv_1],\dots,[Tv_n])$.

18. $[Tv]_F=[T]_F^E\,[v]_E$, או בקצרה: $[Tv]=[T]\,[v]$.

$$[T(\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n)]=[\alpha_1Tv_1+\dots+\alpha_nTv_n]=\alpha_1[Tv_1]+\dots+\alpha_n[Tv_n]=([Tv_1],\cdots,[Tv_n])\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}\,.$$

19. דוגמא.

20. תכונות:

(א) $[O]=O$, ולכל $T\neq O$, $[T]\neq O$.

(ב) $[\alpha T+\beta R]=\alpha[T]+\beta[R]$.

(ג) $T=R\Leftrightarrow[T]=[R]$.

(ד) לכל $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ יש T כך ש $[T]=A$.

ניקח $w_i\in W$ כך ש $[w_i]=Ae_i$, וניקח T כך ש $Tv_i=w_i$ לכל $i=1,\dots,n$.

21. בהצגה לפי הבסיסים הסטנדרטיים של $\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m$ מתקיים $[L_A]=A$.

22. הפונקציה $[\ \ ]\colon\operatorname{Hom}(V,W)\to\mathbb{F}^{m\times n}$ היא איזומורפיזם ($n=\dim V, m=\dim W$).

23. **הרכבה של העתקות לינאריות:** $RT:=R\circ T$.

24. הרכבה של העתקות לינאריות היא העתקה לינארית.

25. $[RT]_G^E=[R]_G^F\cdot[T]_F^E$, או בקצרה: $[RT]=[R]\cdot[T]$.

26. הוכחת נוסחאות הסינוס והקוסינוס.

תהי $T_\alpha\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ סיבוב בזוית α נגד כיוון השעון. לפי הבסיס הסטנדרטי, $[T_\alpha]=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$.

$[T_{\alpha+\beta}]=[T_\alpha T_\beta]=[T_\alpha]\cdot[T_\beta]$.

27. **מטריצות מעבר בין בסיסים:** עבור בסיסים E,F של אותו מרחב וקטורי V, ההצגה של העתקת הזהות $I\colon V\to V$ מקיימת $[I]_F^E\,[v]_E=[v]_F$.

28. $[I]_E^E=I$.

29. $[I]_E^F=\left([I]_F^E\right)^{-1}$.

$[I]_E^F\cdot[I]_F^E=[I]_E^E=I$.