

מבחן בקורס **חשבון אינפיניטסימלי 1** (89-132) מועד **ב** (23.03.2017)

מרצים: לואי פולב, פרופ' מיכאל כץ

מתרגלים: אלעד עטייא, מרדכי יעקב, אריאל ויצמן, אורלי בארשבסקי

משך המבחן הינו שלוש שעות. יש לענות על כל השאלות 1-5.

מותר השימוש במחשבון מדעי (לא מחשבון גרפי). כל חומר עזר פרט למחשבון- אסור.

שימו לב: עליכם לנמק היטב כל תשובה!

שאלה 1 (15 נקודות)

הוכיחו את המשפט הבא:

משפט Rolle:

תהי f פונקציה ממשית הרציפה על הקטע הסגור $[a, b]$ וגזירה על הקטע הפתוח (a, b) . אם $f(a) = f(b) = 0$ אזי קיימת לפחות נקודה אחת $c \in (a, b)$ כך ש- $f'(c) = 0$.

שאלה 2

א. (7 נקודות) תהי סדרה הנתונה באמצעות כלל הנסיגה הבא:

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \sqrt{5a_n - 4}$$

הוכיחו ש- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ מתכנסת, וחשבו את גבולה.

ב. (5 נקודות) חשבו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2} + \dots + \frac{1}{n^2 + n} \right)$

שאלה 3

א. (5 נקודות) חשבו את הגבול $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x + x^2) - 4x}{x^2}$.

ב. (20 נקודות) נתבונן בפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 - 4)}{x - 2} & x < 2 \\ ax + b & 2 \leq x \leq 5 \\ \sqrt{4 + \frac{1}{(\ln(x - 5))^2}} & 5 < x \end{cases}$$

1. עבור אילו ערכי $a, b \in \mathbb{R}$ הפונקציה הנ"ל רציפה בקטע הפתוח $(0, 6)$?

2. הציבו בפונקציה f את ערכי ה- a, b שמצאתם בסעיף הקודם. האם f גזירה

בנקודה $x = 2$? הוכיחו את תשובתכם!

ג. (5 נקודות) התבוננו שוב בפונקציה f מסעיף ב' והציבו בה את הערכים $a = 1, b = 1$.

נתון שעבור הערכים האלה, f אינה רציפה בנקודה $x = 2$. מהו סוג אי-הרציפות

שם (סליקה, מין ראשון, מין שני)? הוכיחו את תשובתכם!

שאלה 4

קבעו לגבי כל טור אם הוא מתכנס בתנאי, מתכנס בהחלט או מתבדר. הוכיחו את

תשובתכם!

א. (7 נקודות) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\ln n}}$

ב. (7 נקודות) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n}{\sqrt{n^4 - 3n^2}}$

ג. (7 נקודות) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{n!(n+1)!}$

שאלה 5

- א.** (15 נקודות) תהינה $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ שתי פונקציות רציפות. נתון שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $f(x) \cdot g(x) > 0$. נתון בנוסף כי $f(2) = 3$. הוכיחו ש- f ו- g הן פונקציות חיוביות, כלומר, לכל $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$ וגם $g(x) > 0$.
- ב.** (10 נקודות) תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה המקיימת $f(x) = (f'(x))^2$ לכל $x \in \mathbb{R}$. הוכיחו ש- f היא פונקציה קבועה.

שאלת בונוס (7 נקודות)

תהי $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה ויהיו $a < b \in \mathbb{R}$. נניח שקיימת סביבה של a שבה $g'(x) < 0$. נתון בנוסף ש- $g(a) < g(b)$. הוכיחו שקיימת נקודה $c \in (a, b)$ עבורה $g'(c) = 0$.

הערה: שימו לב שנגזרת של פונקציה גזירה אינה בהכרח רציפה!

בהצלחה!