

# מבחן בקורס **חשבון אינפיניטסימלי 1** (88-132) מועד **א** (22.02.2018)

---

מרצה: פרופסור מיכאל כץ

מתרגל: דורון פרלמן

משך המבחן הינו שלוש שעות. יש לענות על כל השאלות 1-5.

מותר השימוש במחשבון מדעי (לא מחשבון המצייר פונקציות!). כל חומר עזר פרט למחשבון-אסור.

**שימו לב: עליכם לנמק היטב כל תשובה!**

**שאלה 1** (24 נקודות – 8 נקודות לכל סעיף)

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

- א. יהי  $H$  מספר אינסופי חיובי ויהי  $0 < b \in \mathbb{R}$ . אזי  $Hb$  הוא מספר אינסופי חיובי.  
ב. תהיינה  $f, g$  שתי פונקציות ממשיות ויהי  $c \in \mathbb{R}$ . אם הגבול  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  קיים והגבול  $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$  לא קיים, אז הגבול  $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x))$  לא קיים.  
ג. תהי  $f$  פונקציה ממשית. אם  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ , אז קיים  $a \in \mathbb{R}$  כך ש- $f$  עולה בקטע  $(a, \infty)$ .

**שאלה 2** (26 נקודות)

I. נתונה פונקציה ממשית  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  המוגדרת באמצעות:

$$f(x) = \begin{cases} x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

- א. (7 נקודות) באילו נקודות  $f$  רציפה?  
ב. (8 נקודות) מצאו את  $f'$  בנקודות שבהן  $f$  גזירה.  
ג. (6 נקודות) האם  $f'$  רציפה בכל  $x \in \mathbb{R}$ ? אם כן – הוכיחו; אם לא – סווגו את נקודות האי-רציפות שלה (סליקה, מין ראשון, מין שני).

II. (5 נקודות) חשבו את הגבול הבא, או הוכיחו שאינו קיים:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$ .

נמקו היטב כל צעד בתשובתכם!

**שאלה 3** (22 נקודות)

- א. (12 נקודות) הוכיחו שלכל  $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$  מתקיים:  $\tan x \geq x$ .
- ב. (10 נקודות) תהי  $f$  פונקציה ממשיית גזירה, ונניח ש- $f'$  רציפה ב- $\mathbb{R}$ . נתון ש-  
 $f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 1$ . הוכיחו שקיימת נקודה  $c \in (0, 2)$  המקיימת:  
 $f'(c) = \frac{11}{17}$

**שאלה 4** (14 נקודות – 7 נקודות לכל סעיף)

- א. הוכיחו שהסדרה הבאה היא מונוטונית:  $a_n = \frac{(n+1)!}{2^n}$ .
- ב. מצאו את הגבול הבא אם קיים, ואחרת הוכיחו שאינו קיים:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln n)^n}{(5n)^n}$ .

**שאלה 5** (14 נקודות – 7 נקודות לכל סעיף)

קבעו לגבי כל טור אם הוא מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

- א.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3+1}}$
- ב.  $\sum_{n=8}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln 2n}$

**שאלת בונוס** (10 נקודות)

תהי  $f$  פונקציה ממשית הרציפה בכל נקודה ב- $\mathbb{R}$ . הוכיחו:

קיים פתרון למשוואה  $f(x) = x$  אם ורק אם קיים פתרון למשוואה  $f(f(x)) = x$ .

[שימו לב! יש להוכיח מנימוקים מתמטיים בלבד! אי אפשר להוכיח בציורים ו/או בדוגמאות. נימוקים בסגנון "לפי ההגיון מתקיים כך וכך" לא יתקבלו!]

**בהצלחה!**