

פתרונות עבור תרגיל 2 בשיטות נומריות- אלגברה לינארית

שאלה 1

א. בכל שלב מקפידים שהמספר הגדול ביותר בעמודה הרלוונטית יהיה האיבר שאיתו מאפסים.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

הפתרון הסופי:

ב. כמו בסעיף א'. הפעם מעבירים את האיבר הגדול ביותר בתת המטריצה המתאימה להיות האיבר המאפס. הפתרון אותו פתרון כמו ב-א'.

ג. ע"פ הפירוק שעשינו בסעיפים הקודמים נקבל:

$$U = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 0 & -3.8 & 3.6 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/5 & 1 & 0 \\ 3/5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

והפתרון המתקבל הוא שוב כמו בסעיף א'.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -0.1842 & -0.3421 & 0.4474 \\ -0.4737 & -0.7368 & 0.5789 \\ -0.5000 & -0.5000 & 0.5000 \end{pmatrix}$$

ד. נהפוך את המטריצה A ונקבל:

עבור $t = 1$:

$$\|A\|_1 = 11$$

$$\|A^{-1}\|_1 = 1.7894$$

$$\|A\|_1 * \|A^{-1}\|_1 = 19.6834$$

עבור $t = \infty$:

$$\|A\|_\infty = 10$$

$$\|A^{-1}\|_\infty = 1.5789$$

$$\|A\|_\infty * \|A^{-1}\|_\infty = 15.789$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.045 \\ 2.058 \\ 1.05 \end{pmatrix}$$

ה. נשתמש בפירוק LU שמצאנו ונקבל:

ו. עבור $t = 1$:

$$\frac{\|u - u^*\|_1}{\|u\|_1} = 0.03825$$

עבור $t = \infty$:

$$\frac{\|u - u^*\|_\infty}{\|u\|_\infty} = 0.029$$

שאלה 2:

ע"פ פירוק LU נקבל

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5.2 & 0 \\ 0 & 0 & 3\frac{9}{13} \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 0 & 5.2 & 2.8 \\ 0 & 0 & 3\frac{9}{13} \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/5 & 1 & 0 \\ 3/5 & 7/13 & 1 \end{pmatrix}$$

לכן נקבל .

לכן:

$$R = L * \sqrt{D} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ \sqrt{0.8} & \sqrt{5.2} & 0 \\ \sqrt{1.8} & \sqrt{254.8} & \sqrt{3\frac{9}{13}} \end{pmatrix}$$

שאלה 3:

א. התנאי עבורו המטריצה תתכנס הוא שהע"ע המקסימלי של $H = -D^{-1}(L+U)$ בערך מוחלט יהיה קטן מ-1.

$$\begin{vmatrix} \lambda & b \\ c & \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad -D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ -c & 0 \end{pmatrix}$$

נמצא ע"ע:

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{bc}$$

לכן התנאי להתכנסות הוא $\sqrt{bc} < 1$.

ב. התנאי עבורו המטריצה תתכנס הוא שהע"ע המקסימלי של $H = -(D+L)^{-1}U$ בערך מוחלט יהיה קטן מ-1.

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = bc \quad \begin{vmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda - bc \end{vmatrix} = 0 \quad -(D+L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 0 & bc \end{pmatrix}$$

נמצא ע"ע:

לכן תנאי ההתכנסות הוא $|bc| < 1$.

שאלה 4: (בכל השאלה- לא לשכוח לבדוק תנאי התכנסות!)

א. עבור שיטת יעקובי:

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & -1/7 \end{pmatrix} \quad \text{לכן}$$

$$D^{-1}b = \begin{pmatrix} 1/4 \\ -1/5 \\ -1/7 \end{pmatrix} \quad -D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 3/5 & 0 & -1/5 \\ 2/7 & -4/7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.1 \\ -0.1429 \end{pmatrix}$$

נציב הכל במשוואת הקירוב של יעקובי ונקבל:

ב. עבור שיטת גאוס-זידל, U, L, D מוגדרים כמו בסעיף הקודם.
במקרה הזה משוואת הקירוב תהיה מהצורה:

$$x_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5000 & 0.5000 \\ 0 & 0.3000 & 0.1000 \\ 0 & -0.0286 & 0.0857 \end{pmatrix} x_n + \begin{pmatrix} 0.2500 \\ -0.0500 \\ -0.0429 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.1000 \\ -0.0857 \end{pmatrix}$$

ולכן הקירוב הראשון שנקבל יהיה:

שאלה 5:

עבור k=1:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

א. נירמול העמודה הראשונה:

ב. D=1

$$v_1 = 0.953$$

$$v_{2,3} = 0.214$$

$$H_1 = \begin{pmatrix} -0.516 & -0.4 & -0.4 \\ -0.4 & 0.908 & -0.0916 \\ -0.4 & -0.0916 & 0.908 \end{pmatrix}$$

$$A = H_1 A = \begin{pmatrix} -2.44 & -2.04 & -2.04 \\ 0 & 1.3172 & 0.3172 \\ 0 & 0.3172 & 1.3172 \end{pmatrix}$$

עבור k=2:

$$\begin{pmatrix} -0.823 \\ 0.53 \\ 0.1295 \end{pmatrix}$$

א. נירמול העמודה השנייה:

ב. D=0.553

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.993 \\ 0.1179 \end{pmatrix} \text{ג.}$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.972 & -0.23 \\ 0 & -0.23 & -0.972 \end{pmatrix} \text{ד.}$$

$$R = H_2 A = \begin{pmatrix} -2.44 & -2.04 & -2.04 \\ 0 & -1.35 & -0.61 \\ 0 & 0 & 1.206 \end{pmatrix} \text{ה.}$$

$$Q = (H_2 H_1)^{-1} \text{ ומוציאים את } Q \text{ שמקיימת:}$$

שאלה 6:

$$v_1^* = Av_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 115 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 0.0522 \\ 0.1304 \\ 1.0000 \end{pmatrix}$$

$$\|v_1 - v_0\| = 0.7478 > \varepsilon$$

$$v_2^* = Av_1 = \begin{pmatrix} 3.3130 \\ 6.8609 \\ 101.4087 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 0.0327 \\ 0.0677 \\ 1.0000 \end{pmatrix}$$

$$\|v_2 - v_1\| = 0.0628 > \varepsilon$$

$$v_3^* = Av_2 = \begin{pmatrix} 3.1680 \\ 6.4690 \\ 100.7699 \end{pmatrix} \Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 0.0314 \\ 0.0642 \\ 1.0000 \end{pmatrix}$$

$$\|v_3 - v_2\| = 0.003 < \varepsilon$$

$$\lambda = \|Av_3\| = 100.7337$$