

תרגיל מס' 3 - פתרון

שאלה 1:

א. נתונה מערכת משוואות הבאה:

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 8 & 4 & 3 \\ 1 & 17 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ 21 \end{pmatrix} = \vec{b}$$

דרג' את המטריצה עם שחלוף שורות ומצא' את וקטור הנעלמים.

פתרון:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 1 & 9 \\ 8 & 4 & 3 & 10 \\ 1 & 17 & 2 & 21 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 4 & 3 & 10 \\ 2 & 7 & 1 & 9 \\ 1 & 17 & 2 & 21 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} R_2 \leftarrow R_2 - \frac{1}{4}R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - \frac{1}{8}R_1 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 4 & 3 & 10 \\ 0 & 6 & 0.25 & 6.5 \\ 0 & 16.5 & 1.625 & 19.75 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 4 & 3 & 10 \\ 0 & 16.5 & 1.625 & 19.75 \\ 0 & 6 & 0.25 & 6.5 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - \frac{6}{16.5}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 4 & 3 & 10 \\ 0 & 16.5 & 1.625 & 19.75 \\ 0 & 0 & -\frac{15}{44} & -\frac{15}{22} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

שאלה 1:

ב. נתונה מערכת משוואות הבאה:

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 7 \\ 1 & 5 & 15 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 28 \\ 20 \end{pmatrix} = \vec{b}$$

דרג/ את המטריצה עם שחלוף עמודות ומצא/ את וקטור הנעלמים.

פתרון:

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 7 & | & 29 \\ 1 & 5 & 15 & | & 28 \\ 4 & 3 & 2 & | & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{C_2 \leftrightarrow C_1 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}}} \begin{pmatrix} 8 & 2 & 7 & | & 29 \\ 5 & 1 & 15 & | & 28 \\ 3 & 4 & 2 & | & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \leftarrow R_2 - \frac{5}{8}R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - \frac{3}{8}R_1}} \begin{pmatrix} 8 & 2 & 7 & | & 29 \\ 0 & -0.25 & 10\frac{5}{8} & | & 9\frac{7}{8} \\ 0 & 3.25 & \frac{-5}{8} & | & 9\frac{1}{8} \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{C_3 \leftrightarrow C_2 \\ \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}} \begin{pmatrix} 8 & 7 & 2 & | & 29 \\ 0 & 10\frac{5}{8} & -0.25 & | & 9\frac{7}{8} \\ 0 & \frac{-5}{8} & 3.25 & | & 9\frac{1}{8} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - \frac{1}{17}R_2} \begin{pmatrix} 8 & 7 & 2 & | & 29 \\ 0 & 10\frac{5}{8} & -0.25 & | & 9\frac{7}{8} \\ 0 & 0 & 3\frac{4}{17} & | & 9\frac{12}{17} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

שאלה 1:

ג. נתונה מערכת משוואות הבאה:

$$\vec{A}\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 & 12 & 8 & 7 \\ 1 & 4 & 11 & 3 \\ 1 & 2 & 8 & 4 \\ 2 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 5 \\ 2 \\ 23 \end{pmatrix} = \vec{b}$$

דרג/ את המטריצה עם שחלוף עמודות ושורות ומצא/ את וקטור הנעלמים.

פתרון:

בשלב הראשון יש להחליף את עמודות 1 ו-2 ולאחר ביצוע דירוג, להחליף שוב את עמודות 2 ו-3 ושורות 3 ו-4. בסופו של התהליך מתקבלת תשובה הבאה:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

שאלה 2:

נתונה מטריצה הבאה:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 & 2 \\ 2 & 7 & 0 & 5 \\ 6 & 16 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

מצא/י פירוק $PA = LU$.

פתרון:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 & 2 \\ 2 & 7 & 0 & 5 \\ 6 & 16 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 6 & 16 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 5 \\ 5 & 4 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_2 \leftarrow R_2 - \frac{1}{3}R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - \frac{5}{6}R_1 \\ R_4 \leftarrow R_4 - \frac{1}{2}R_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 6 & 16 & 3 & 0 \\ 0 & 1\frac{2}{3} & -1 & 5 \\ 0 & -9\frac{1}{3} & 4.5 & 2 \\ 0 & -6 & -0.5 & 2 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R_3 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 6 & 16 & 3 & 0 \\ 0 & -9\frac{1}{3} & 4.5 & 2 \\ 0 & 1\frac{2}{3} & -1 & 5 \\ 0 & -6 & -0.5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_3 \leftarrow R_3 + \frac{5}{28}R_2 \\ R_4 \leftarrow R_4 - \frac{9}{14}R_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 6 & 16 & 3 & 0 \\ 0 & -9\frac{1}{3} & 4.5 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{56} & 5\frac{5}{14} \\ 0 & 0 & -3\frac{11}{28} & \frac{5}{7} \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, R_4 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 6 & 16 & 3 & 0 \\ 0 & -9\frac{1}{3} & 4.5 & 2 \\ 0 & 0 & -3\frac{11}{28} & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{11}{56} & 5\frac{5}{14} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 - \frac{\frac{11}{56}}{-3\frac{11}{28}}R_3} \begin{pmatrix} 6 & 16 & 3 & 0 \\ 0 & -9\frac{1}{3} & 4.5 & 2 \\ 0 & 0 & -3\frac{11}{28} & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 5\frac{6}{19} \end{pmatrix} = U \end{aligned}$$

כדי לגלות את P, נשחרר את כל השחלופים מימין לשמאל:

$$P_3 P_2 P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P$$

$$PA = \begin{pmatrix} 6 & 16 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

עכשיו נחשב את L (לפי הפעולות הנגדיות לפעולות האלמנטריות שביצענו).

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5/6 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 9/14 & 1 & 0 \\ 1/3 & -5/28 & 11/56 & 28/95 \end{pmatrix}$$

לסיכום נקבל את הפירוק הדרוש:

$$PA = \begin{pmatrix} 6 & 16 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5/6 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 9/14 & 1 & 0 \\ 1/3 & -5/28 & 11/56 & 28/95 \end{pmatrix}}_L \underbrace{\begin{pmatrix} 6 & 16 & 3 & 0 \\ 0 & -9\frac{1}{3} & 4.5 & 2 \\ 0 & 0 & -3\frac{11}{28} & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 5\frac{6}{19} \end{pmatrix}}_U$$

שאלה 3:

נתונה מטריצה הבאה:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & -4 & 2 & 5 \\ -2 & 6 & -5 & -2 \\ 5 & 1 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

מצא/י פירוק $A = LU$ על פי שיטת "בלוקים"

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{pmatrix} = LU$$

פתרון:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{14}{11} & 1 & 0 \\ \frac{5}{4} & \frac{3}{11} & -\frac{13}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{11}{4} & \frac{11}{4} \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{9}{4} \end{pmatrix}$$

שאלה 4

חשבו/ את $\text{Cond}(A)$ של המטריצות הבאות:
א.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

ב.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

פתרון

א. ראשית יש למצוא את A^{-1} :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 810 & 720 \\ 720 & 648 \end{pmatrix}$$

בהמשך נמצא את נורמת האינסוף של כל אחת מהמטריצות A ו- A^{-1} :

$$\|A\|_{\infty} = \max\left(\left|\frac{1}{10}\right| + \left|-\frac{1}{9}\right|, \left|-\frac{1}{9}\right| + \left|\frac{1}{8}\right|\right) = \frac{17}{72}$$

$$\|A^{-1}\|_{\infty} = \max(810 + 720, 720 + 648) = 1530$$

$$\Rightarrow \text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = 1530 \cdot \frac{17}{72} = 361.25$$

קיבלנו תוצאה גדולה בהרבה מ-1, כלומר הבעיה בעלת הצגה גרועה.

ב. גם כאן נבצע את השלבים של סעיף א':

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

בהמשך נמצא את נורמת האינסוף של כל אחת מהמטריצות A ו- A^{-1} :

$$\|A\|_{\infty} = \max(2 + 4, 1 + 2) = 6$$

$$\|A^{-1}\|_{\infty} = \max\left(\left|\frac{1}{4}\right| + \left|-\frac{1}{2}\right|, \left|\frac{1}{8}\right| + \left|\frac{1}{4}\right|\right) = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = 6 \cdot \frac{3}{4} = 4.5$$

קיבלנו תוצאה לא גדולה בהרבה מ-1, כלומר הבעיה מוצגת היטב.

שאלה 5

מצא/י פירוק QR של

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

פתרון

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{6} & -\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

שאלה 6

מצא/י וקטור עצמי דומיננטי של

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 11 & -5 \\ -2 & 17 & -7 \\ -4 & 26 & -10 \end{pmatrix}$$

פתרון

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Ax_0 = \begin{pmatrix} 0 & 11 & -5 \\ -2 & 17 & -7 \\ -4 & 26 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} = 12 \begin{pmatrix} 0.5 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} \Rightarrow Ax_1 = \begin{pmatrix} 0 & 11 & -5 \\ -2 & 17 & -7 \\ -4 & 26 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 40 \\ 64 \end{pmatrix} = 64 \begin{pmatrix} 7/16 \\ 5/8 \\ 1 \end{pmatrix} \approx 64 \begin{pmatrix} 0.43 \\ 0.62 \\ 1 \end{pmatrix} = x_2$$

$$x_2 = \begin{pmatrix} 28 \\ 40 \\ 64 \end{pmatrix} \Rightarrow Ax_2 = \begin{pmatrix} 0 & 11 & -5 \\ -2 & 17 & -7 \\ -4 & 26 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 28 \\ 40 \\ 64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ 176 \\ 288 \end{pmatrix} = 288 \begin{pmatrix} 5/12 \\ 11/18 \\ 1 \end{pmatrix} \approx 288 \begin{pmatrix} 0.41 \\ 0.61 \\ 1 \end{pmatrix} = x_3$$

$$x_3 = \begin{pmatrix} 120 \\ 176 \\ 288 \end{pmatrix} \Rightarrow Ax_3 = \begin{pmatrix} 0 & 11 & -5 \\ -2 & 17 & -7 \\ -4 & 26 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 120 \\ 176 \\ 288 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 496 \\ 736 \\ 1216 \end{pmatrix} = 1216 \begin{pmatrix} 31/76 \\ 23/38 \\ 1 \end{pmatrix} \approx 1216 \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.6 \\ 1 \end{pmatrix} = x_4$$

ניתן לראות כי האיטרציה מתכנסת לוקטור עצמי $v = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

נחשב את הערך העצמי המתאים:

$$\lambda = \frac{(Av)^T v}{v^T v} = 4$$