

אוניברסיטה בר-אילן  
המחלקה למתמטיקה

בחינה במתמטיקה 2300-0

מועד א', תשל"ו 11.6.76

בחינה בחורף הקבוצות

הזמן-שעתיים. יש לבחור שאלה אחת מחלק א' (40 נקודות) ושתי שאלות מחלק ב' (30 נקודות כל אחת).

חלק א'

$2^{\aleph_0} \neq \aleph_\omega$

1. לנסח ולהוכיח את אי-השוויון של צרמלו-קניג ולהסיק ממנו ש-

2. לנסח ולהוכיח את הלמה של צורן, ולתת דוגמה פשוטה לשימושה.

3. יחס  $R$  על קבוצה  $A$  נקרא מבוסס היטב כאשר לכל קבוצה לא ריקה יש אבר " $R$ -מינימלי" (כלומר אבר  $a$  של  $X$  כך שלא קיים המקיים  $\forall R a$ ).

להוכיח שאם  $R$  יחס מבוסס היטב על  $A$  אז קיים סידור טוב  $<$  של  $A$  כך שלכל  $a, b$

$a R b \Rightarrow a < b$

רמז: בונים סדרת אברים מ- $A$ , בכל צעד לוקחים אבר  $R$ -מינימלי בין אלה שעוד נותרו, לבסוף נמצים את  $A$  ואז הסדרה שקיבלנו נותנת את הסידור הטוב הדרוש.

4. השערת הרצף המוכללת (GCH) אומרת ש- $2^k = k^+$  לכל מונה אינסופי  $k$ .

להראות שבהנחת GCH נקבעת החזקה  $k^\lambda$  באופן חד-ערכי כדלקמן (עבור  $\lambda, k$  מונים אינסופיים):

I. אם  $k \in \lambda$  אז  $k^\lambda = \lambda^+$

II. אם  $k < cf(\lambda) \leq \lambda < k$  אז  $k^\lambda = k^+$

III. אם  $\lambda < cf(k)$  אז  $k^\lambda = k$

רמז: GCH גוררת  $k^\lambda \leq [\max(k, \lambda)]^+$  (מדוע?).

עבור II יש לזכר ש- $k < cf(k) > k$ . עבור III משתמשים בכך שכל פונקציה מ- $\lambda$  לתוך  $k$  היא חסומה.

חלק ב'

1. לנסח את אכסיומת הבחירה ולהוכיח ב-ZF את שקילותה לטענה שכלפלה קרטזית של ששפת קבוצות לא ריקות היא לא ריקה.

2. להוכיח שאם  $\alpha, \beta$  סודרים אז  $\alpha \in \beta$  או  $\alpha = \beta$  או  $\beta \in \alpha$ . יש לצאת מהגדרת סודר קבוצת טרנזיטיבית שכל אבריה טרנזיטיביים ולא להשתמש במשפטים קודמים על סודרים.

3. להוכיח שהיחס  $x \sim y$  מוגדר על ידי  $x \sim y$  אם ורק אם  $x \sim y$  או  $y \sim x$  הוא יחס שקילות. להוכיח שהיחס  $\sim$  הוא שקילות (ולחזור בשאלה).