

תורת הקבוצות, 88-202

ד"ר אסף רינות

מועד א, תשע"ד

משך המבחן: 3 שעות.

אין להשתמש בכל חומר עזר מכל סוג שהוא.

יש לענות על כל השאלות. משקל כל שאלה: 15 נקודות.

ציון מבחן מקסימלי: 100 נקודות.

1. הדגימו קיומם של סודרים  $\alpha, \beta$  כך ששני הבאים מתקיימים בו־זמנית:

1.  $\alpha + \beta \neq \beta + \alpha$ ,

2.  $\alpha \cdot \beta \neq \beta \cdot \alpha$ .

2. נניח  $\lambda \leq \kappa$  מונים אינסופיים. הוכיחו כי  $2^\lambda = \kappa^\lambda$ .

3. הוכיחו כי  $\aleph_1^{\aleph_0} = \aleph_1$  אמ"מ  $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ .

4. הגדירו את פונקציית  $ICN : O_n \rightarrow \aleph$ , והוכיחו כי לכל סודר  $\alpha$  קיים סודר  $\delta < \alpha$  המהווה נקודת שבת של  $\aleph$ .

5. הוכיחו כי  $\aleph_{\aleph_1} \neq \aleph_{\aleph_0}$ .

6. הגדירו את מספר הרטוגס של קבוצה  $A$ ,  $H(A)$ , והוכיחו כי הוא מונה.

7. הוכיחו כי עקרון הסדר הטוב שקול מעל ZF לטענה הבאה.

לכל שתי קבוצות לא ריקות  $X, Y$ , לפחות אחד מהבאים מתקיים:

1. קיימת פונקציה חח"ע מ־ $X$  ל־ $Y$ ;

2. קיימת פונקציה חח"ע מ־ $Y$  ל־ $X$ .

8. הוכיחו כי קיים על־מסנן מעל  $\omega$  המרחיב את המסנן  $D = \{A \subseteq \omega \mid |\omega \setminus A| < \aleph_0\}$ .

9. נניח  $n$  טבעי ו־ $\mathcal{A} \supseteq [\omega]^n$  אינסופית.

הוכיחו כי קיימת תת־קבוצה  $\mathcal{A}' \supseteq \mathcal{A}$  אינסופית, וקבוצה  $r$ , כך ש־ $a \cap b = r$  לכל  $a, b$  שונים מ־ $\mathcal{A}'$ .

בהצלחה!