

אלגוריתמים 1 – תרגיל 9
להגשה ב-11-12/12

חל איסור חמור על החזקת פתרונות של סטודנטים אחרים. על כל סטודנט לרשום את תשובותיו עצמאית ובמילותיו שלו. כל אפשרות אחרת תחשב להעתקה. לכל אלגוריתם יש לתת הוכחת נכונות וכמו כן ניתוח של זמן ריצה (וגם זיכרון אם רלוונטי). עליכם לתת את האלגוריתם עם זמן הריצה הטוב ביותר שאליו אתם יכולים להגיע (גם אם לא מצוין מהו).

1. שאלה זו מתייחסת לאלגוריתם של Prim שמופיע באתר.

- a. הוכיחו שאלגוריתם Prim יוצר עץ פורש מינימלי. הדרכה: השתמשו לשם כך בהוכחה של האלגוריתם הגנרי ליצירת עץ פורש מינימלי. הגדירו את הקבוצה המבטיחה והחתך בכל שלב, והוכיחו שהקשת המצורפת לעץ הפורש היא קשת בטוחה ביחס לקבוצה המבטיחה.
- b. זמן הריצה של אלגוריתם Prim תלוי באופן הגישה לשכני הקודקודים (Adj) ובמבנה הנתונים Q. תארו כיצד צריך לייצג את מבנה הנתונים Q, ואיך מתבצעות פעולות ההכנסה, הוצאה ועדכון, כך שזמן הריצה של האלגוריתם יהיה $O((V+E)\log V)$. (זכרו שהגרף מיוצג על ידי רשימת שכנויות). שימו לב שעדכון ערכי המערך key יכול לשנות את תוצאת הפעולה Extract-Min.
- c. נתונה קבוצת מספרים S בגודל k קבוע. נתון שמשקל כל קשת בגרף יכול להיות רק מהקבוצה S כלומר פונקציית המשקלים היא $w: E \rightarrow S$. תארו כיצד צריך לייצג את מבנה הנתונים Q, ואיך מתבצעות פעולות ההכנסה, הוצאה ועדכון, כך שזמן הריצה של האלגוריתם יהיה פחות מ- $O((V+E)\log V)$ ל-k קבוע.

2. הוכיחו או סתרו את הטענה הבאה. תשובה לא מנומקת לא תתקבל:
נתון גרף לא מכוון וקשיר $G=(V,E)$ עם פונקציית משקל $w: E \rightarrow R$. יהי u קודקוד ב-G ו- (u,v) הקשת עם המשקל המינימלי שיוצאת מ-u. אזי, קיים עץ פורש מינימלי שמכיל את (u,v) .
3. יהי $G=(V,E,w)$ גרף קשיר, לא מכוון וממושקל (w פונקציית המשקל על הקשתות). נניח שמשקל הקשת הקלה ביותר הוא C, ובפרט לכל $e \in E$ מתקיים $w(e) \geq C$. שימו לב ש-C יכול להיות שלילי, חיובי או אפס. נניח שנוריד C ממשקל כל קשת ב-G (כלומר נקבל $G'=(V,E,w')$ כאשר $w'(e) = w(e) - C$).
הוכיחו או סתרו את הטענה הבאה:
עץ פורש מינימלי ב-G' הוא עץ פורש מינימלי ב-G.
4. הוכיחו את המשפט הבא.
נתון גרף קשיר לא מכוון $G=(V,E)$ ופונקציית משקל $w: E \rightarrow R$. לכל מעגל C ב-G, אם קיימת קשת e ב-C כך שלכל קשת אחרת e' ב-C מתקיים $w(e) > w(e')$, אזי לא קיים MST שמכיל את e.
5. נתון גרף קשיר לא מכוון $G=(V,E)$ פונקציית משקל $w: E \rightarrow R$, וקשת $(u,v) \in E$. תארו אלגוריתם הפועל בזמן ליניארי שבודק האם קיים עץ פורש מינימלי של G שמכיל את הקשת (u,v) .

6. נתון גרף קשיר לא מכוון $G=(V,E)$, ופונקציית משקל $w: V \rightarrow R$. תארו אלגוריתם שמוצא עץ פורש T שנותן מינימום ל- $\sum_{v \in V} d_T(v)w(v)$ כאשר $d_T(v)$ זו הדרגה של v ב- T . (טעות נפוצה היא למיין את הקודקודים לפי משקלם בסדר עולה, וכל פעם להסתכל את הקודקוד בעל המשקל המינימלי, ולהוסיף את כל קשתותיו שאינן יוצרות מעגל ל-MST. ניתן להראות דוגמא שבה אלגוריתם זה לא יעבוד).

בהצלחה!