

אלגוריתמים 1 – תרגיל 13
להגשה ב-9/2/12

חל איסור חמור על החזקת פתרונות של סטודנטים אחרים. על כל סטודנט לרשום את תשובותיו **עצמאית** ובמילותיו שלו. כל אפשרות אחרת תחשב להעתקה. לכל אלגוריתם יש לתת הוכחת נכונות וכמו כן ניתוח של זמן ריצה (וגם זיכרון אם רלוונטי). עליכם לתת את האלגוריתם עם זמן הריצה הטוב ביותר שאליו אתם יכולים להגיע (גם אם לא מצוין מהו).

- נתון גרף לא מכוון $G=(V,E)$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:
 - אם M היא התאמה מושלמת, אזי היא גם התאמת מקסימום.
 - אם M היא התאמת מקסימום, אזי היא גם התאמה מקסימלית.
 - אם M היא התאמה מקסימלית, אזי היא גם התאמת מקסימום.
- הוכיחו שכל גרף (לא מכוון) דו-חלקי d -רגולרי הוא איחוד זר של d התאמות מושלמות. (גרף הוא d -רגולרי אם הדרגה של כל קודקוד בגרף היא d).

- בכוכב 'גרפית' האוכלוסייה נחלקת לשלוש קבוצות זרות:
 - קבוצת הנשים שתסומן ב- A .
 - קבוצת הגברים כבדי התנוך, B .
 - קבוצת הגברים זהובי הבלורית, C .

- לפי המסורת בגרפית כל אישה מ- A יכולה לבחור אחת מהאפשרויות הבאות:
- להינשא לגבר אחד.
 - להנשא לשני גברים: האחד כבד תנוך (כלומר גבר מ- B) והשני זהוב בלורית (מ- C).
 - לא להנשא כלל.
- כל גבר יכול להנשא לאישה אחת לכל היותר.
- לכל אישה $a \in A$ ישנן שתי קבוצות $a_B \subseteq B$ ו- $a_C \subseteq C$ של גברים להם היא יכולה להנשא. תנו אלגוריתם יעיל ככל האפשר שמשדך נשים וגברים בגרפית לפי החוקים לעיל כך שמשפר הגברים המשודכים יהיה מרבי.

- יהי $G=(U,V,E)$ גרף דו-חלקי כך ש- $|E|=m$, $|V|=k$, $|U|=n$ וכאשר k הרבה יותר קטן מ- n . הציעו אלגוריתם למציאת התאמת מקסימום ב- G הרץ בזמן $O(m+k^3)$.
- יהי $G=(U,V,E)$ גרף דו-חלקי ממושקל, כאשר $U=\{u_1, \dots, u_n\}$ ו- $V=\{v_1, \dots, v_n\}$ כלומר $|U|=|V|=n$. התאמה חסרת חיתוכים היא התאמה M (Matching) כך שכל שתי קשתות (u_i, v_j) , (u_k, v_l) השייכות להתאמה M אינן "נחתכות", כלומר מקיימים: $(i < k \text{ ו- } j < l)$ או $(k < i \text{ ו- } l < j)$. הציעו אלגוריתם תכנות דינמי יעיל למציאת התאמה חסרת חיתוכים מקסימלית (שימו לב שכאן הגודל של התאמה הוא סכום המשקלים של הקשתות בהתאמה).

בהצלחה !