

אלגוריתמים 1 – תרגיל 1
להגשה בשבוע השני של הסמסטר

חל איסור חמור על החזקת פתרונות של סטודנטים אחרים. על כל סטודנט לרשום את תשובותיו עצמאית ובמילותיו שלו. כל אפשרות אחרת תחשב להעתקה. לכל אלגוריתם יש לתת הסבר מספק מדוע הוא עובד, וכמו כן ניתוח של זמן ריצה.

שימו לב: בתרגיל ניתן להשתמש באלגוריתם ה-select שמוצא את האיבר ה-k בגודלו בזמן לינארי.

1. נגדיר סדרה של מספרים שבה האיבר ה-n מסומן על ידי g_n באופן הבא:

$$g_n = \begin{cases} \alpha & n = 1 \\ \beta & n = 2 \\ \gamma & n = 3 \\ 5g_{n-1} + 3g_{n-3} & \text{otherwise} \end{cases}$$

כש- α, β, γ הם פרמטרים.

תארו אלגוריתם שמקבל כקלט מספר טבעי n ומחזיר את g_n . ניקוד מלא יינתן לאלגוריתם שרץ בזמן $\theta(\log n)$.

2. נתון מערך A עם n אברים. תארו אלגוריתם המוצא את האיבר המינימאלי השני בגודלו במערך A בלכל היותר $n + \log n$ השוואות (כלומר, אם המערך היה ממוין, האיבר אותו אנו מחפשים הוא [A[2]). שימו לב שהבקשה היא לא סדר גודל, אלא בדיוק $n + \log n$.

3. נתון מילון עברי-אנגלי המכיל זוגות של מילה בעברית והתרגום שלה באנגלית. מעוניינים לבצע במילון חיפושים משני סוגים: חיפוש לפי מילה בעברית, וחיפוש לפי מילה באנגלית.

אם היינו מחזיקים מילון בו ניתן לחפש רק לפי שפה אחת, למשל רק לפי מילה בעברית, היינו יכולים למיין את זוגות המילים לפי המילה בעברית, והחיפוש היה חיפוש בינארי ב- $\theta(\log n)$. חיפוש מילה באנגלית במילון זה היה מתבצע ב- $\theta(n)$.

אנחנו רוצים לשמור את זוגות המילים במערך אחד בלבד (ללא מידע נוסף). הראו כיצד ניתן בזמן $\theta(n \log n)$ לסדר את זוגות המילים כך שהזמן לבצע כל חיפוש יהיה $\theta(\sqrt{n})$. הניחו שגודל המילים חסום, ואפשר לבצע השוואה בין שתי מילים ב- $\theta(1)$.

4. א. הגדרה: סדרה $A = (a_1, \dots, a_n)$ של מספרים תקרא סדרת גג אם קיים טבעי $1 \leq i \leq n$ כך ש- $a_1 < a_2 < \dots < a_{i-1} < a_i > a_{i+1} > \dots > a_{n-1} > a_n$. הציעו אלגוריתם שבהינתן מספר x וסדרת גג A מחזיר אם x שייך ל-A.

ב. הגדרה: סדרה $A = (a_1, \dots, a_n)$ של מספרים תקרא סדרה ביטונית אם היא סדרת גג או שאפשר לקבל ממנה סדרת גג ע"י סיבוב ציקלי. דוגמא: (a_1, \dots, a_n) זה סיבוב ציקלי של $(a_{n-1}, a_n, a_1, \dots, a_{n-2})$. הציעו אלגוריתם שבהינתן מספר x וסדרה ביטונית A מחזיר אם x שייך ל-A.

5. הגדרה: מערך A של n איברים הוא בעל איבר-רוב אם יותר מחצי מהאיברים בו זהים. בהנתן מערך A , כתבו אלגוריתם יעיל הבדוק האם יש איבר-רוב במערך ומה ערכו. פעולת ההשוואה היחידה המותרת בין איברי המערך היא $A[i] = A[j]$? (כלומר, לא ניתן לבדוק האם $A[i] > A[j]$), והיא לוקחת זמן קבוע.

השתמשו בטענה הבאה, והוכיחו אותה:
טענה: איבר x הוא איבר-רוב במערך A או"א בהנתן חלוקה לזוגות איברים של איברי המערך A , האיבר x מופיע ברוב הזוגות שבהם שני האיברים זהים.

ניקוד מלא יינתן לאלגוריתם יעיל.

בהצלחה!