<u>דוגמא:</u>

נניח $A(x) = 4 + 3x + 2x^2 + x^3$

ו- $B(x) = 3 + x^2 + 2x^3$.

פולינום המכפלה $C(x)$ הוא ממעלה 6, לכן נרחיב את A ו- B ל- 8 מקדמים ע"י הוספת אפסים מובילים:

$A = (4,3,2,1,0,0,0,0)$,

$B = (3,0,1,2,0,0,0,0)$.

כעת צריך לחשב את הערכים של A ו- B ב- 8 שורשי היחידה מסדר 8.

$w = w_8 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ הוא השורש הראשון והוא יוצר את כולם.

כל השורשים הם:

$$w^0, w^1, w^2, w^3, w^4, w^5, w^6, w^7$$

ושווים ל-

$1, w, i, iw, -1, -w, -i, -iw$.

$$A(x) = A_{even}(x^2) + xA_{odd}(x^2)$$

$$A(x) = A_{0246}(x^2) + xA_{1357}(x^2)$$

ומחשבים ב- 8 שורשי היחידה מסדר 8

$x = 1, w, i, iw, -1, -w, -i, iw$

$A_{1357}(x) = A_{15}(x^2) + xA_{37}(x^2)$,

$A_{0246}(x) = A_{04}(x^2) + xA_{26}(x^2)$

ומחשבים ב- 4 שורשי היחידה מסדר 4

$x = 1, i, -1, -i$

$$A_{04}(x) = A_0(x^2) + xA_4(x^2),$$
$$A_{26}(x) = A_2(x^2) + xA_6(x^2),$$
$$A_{15}(x) = A_1(x^2) + xA_5(x^2),$$
$$A_{37}(x) = A_3(x^2) + xA_7(x^2)$$

ומחשבים ב- 2 שורשי היחידה מסדר 2

$x = 1, -1$ ולבסוף:

$$A_0(x) = a_0,$$
$$A_4(x) = a_4,$$
$$A_2(x) = a_2,$$
$$A_6(x) = a_6,$$
$$A_1(x) = a_1,$$
$$A_5(x) = a_5,$$
$$A_3(x) = a_3,$$
$$A_7(x) = a_7$$

ומחשבים בשורש היחידה מסדר אחד

$x = 1$ ומקבלים בדיוק את המקדם:

$A_0(1) = 4,$ $A_1(1) = 3,$

$A_4(1) = 0,$ $A_5(1) = 0,$

$A_2(1) = 2$ $A_3(1) = 1,$

$A_6(1) = 0,$ $A_7(1) = 0$

כעת חוזרים ומציבים אחורה בהתאם לפולינומים ומקבלים בנקודות 1-, x=1:

$$A_{04}(1,-1) = (4,4), A_{26}(1,-1) = (2,2),$$

$$A_{15}(1,-1) = (3,3), A_{37}(1,-1) = (1,1)$$

בנקודות $x = 1, i, -1, -i$:

$$A_{0246}\begin{pmatrix}1\\ i\\ -1\\ -i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4+1*2\\ 4+i*2\\ 4-1*2\\ 4-i*2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\ 4+2i\\ 2\\ 4-2I\end{pmatrix}$$

$$A_{1357}\begin{pmatrix}1\\ i\\ -1\\ -i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3+1*1\\ 3+i*1\\ 3-1*1\\ 3-i*1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\ 3+i\\ 2\\ 3-I\end{pmatrix}$$

בנקודות $x = 1, w, i, iw, -1, -w, -i, iw$:

$$A_{01234567}\begin{pmatrix}1\\ w\\ i\\ iw\\ -1\\ -w\\ -i\\ iw\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6+1*4\\ 4+2i+w(3+i)\\ 2+i*2\\ 4-2I+iw(3-i)\\ 6-1*4\\ 4+2i-w(3+i)\\ 2-i*2\\ 4-2i-iw(3-i)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\ 4+3w+2i+iw\\ 2+2i\\ 4+w-2i+3iw\\ 2\\ 4-3w+2i-iw\\ 2-2i\\ 4-w-2i-3iw\end{pmatrix}$$

וזו למעשה ההצגה של הפולינום $A(x)=4+3x+2x^2+x^3$ בייצוג ע"י נקודות.

כדי להציב את 8 שורשי היחידה הצבנו את הריבועים שלהם בשלב הקודם, וכך הלאה בהתאם לשיטת ה- DFT בזמן $O(n\log n)$.
(לנו זה לקח יותר ...)
כעת יש לעשות אותו הדבר עבור הפולינום $B(x)=3+x^2+2x^3$ ולקבל אותו גם כן בייצוג ע"י נקודות. (**תרגיל !**)

בחישוב דומה עבור $B(x)$ נקבל:

$$B_{01234567}\begin{pmatrix}1\\ w\\ i\\ iw\\ -1\\ -w\\ -i\\ iw\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+1*2\\ 3+i+w(2i)\\ 2+i*-2\\ 3-I+iw(-2i)\\ 4-1*2\\ 3+i-w(2i)\\ 2-i*-2\\ 3-i-iw(-2i)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\ 3+i+2iw\\ 2-2i\\ 3+2w-i\\ 2\\ 3+i-2iw\\ 2+2i\\ 3-2w-i\end{pmatrix}$$

לאחר שבצענו $DFT(A)$ ו- $DFT(B)$ נתונים לנו A ו- B בייצוג ע"י נקודות. כעת יש לבצע את הכפל בין הערכים של A ו- B בכל נקודה. המכפלה תתן את הערך של פולינום המכפלה בשמונת שורשי היחידה מסדר 8. ולמעשה קיבלנו את פולינום המכפלה בייצוג ע"י נקודות כפי שרצינו.

$$\begin{pmatrix}10\\ 4+3w+2i+iw\\ 2+2i\\ 4+w-2i+3iw\\ 2\\ 4-3w+2i-iw\\ 2-2i\\ 4-w-2i-3iw\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}6\\ 3+i+2iw\\ 2-2i\\ 3+2w-i\\ 2\\ 3+i-2iw\\ 2+2i\\ 3-2w-i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}60\\ 4+4w+8i+14iw\\ 8\\ 4+14w-8i+4iw\\ 4\\ 4-4w+8i-14iw\\ 8\\ 4-14w-8i-4iw\end{pmatrix}\overset{def}{=}Y$$

בכל שורה יש כפל של
שני מספרים מרוכבים

כעת נרצה לקבל את מקדמי פולינום המכפלה $C(x)$ על סמך הנקודות. כלומר, נעבור מייצוג ע"י נקודות לייצוג ע"י מקדמים על יד ביצוע $DFT^{-1}(Y)$:

אם היה נתון הפולינום $C(x)$ היינו מציבים בו את שמונת שורשי היחידה ומקבלים את וקטור הערכים Y.

כפל של שורה j , $j=0,\ldots,7$, במטריצה F_8 בוקטור c פרושו הצבת הנקודה $x=w^j$ בפולינום $C(x)$ וקבלת ערך הפולינום בנקודה. (נשים לב שהחזקות הן מודולו 8 כיוון שעובדים עם שורשי יחידה מסדר 8). אם היו לנו c_j, היינו כופלים במטריצה F_8 ומקבלים את Y. אולם, נתונים לנו Y ו- ואנו רוצים את C. כדי לקבל את C צריך להכפיל במטריצה ההופכית: $C=F_8^{-1}Y$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 & w^3 & w^4 & w^5 & w^6 & w^7 \\ 1 & w^2 & w^4 & w^6 & w^8 & w^2 & w^4 & w^6 \\ 1 & w^3 & w^6 & w & w^4 & w^7 & w^2 & w^5 \\ 1 & w^4 & w^8 & w^4 & w^8 & w^4 & w^8 & w^4 \\ 1 & w^5 & w^2 & w^7 & w^4 & w & w^6 & w^3 \\ 1 & w^6 & w^4 & w^2 & w^8 & w^6 & w^4 & w^2 \\ 1 & w^7 & w^6 & w^5 & w^4 & w^3 & w^2 & w \end{pmatrix}}_{F_8} \underbrace{\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \end{pmatrix}}_{C} = Y$$

המטריצה F_n: זו מטריצה מיוחדת שנקראת van-der-monde. הכניסה (j,k) $j,k=0,\ldots,n-1$ במטריצה F_n היא w^{jk}. הכניסה (j,k) במטריצה ההופכית F_n היא $\frac{1}{n}w^{-jk}$. לכן, כדי לקבל את המטריצה ההופכית צריך לרשום את כל החזקות במינוס (מודולו n, למשל אם n =8 אזי

w^{-5} שווה ל- w^3) ולחלק את כל האברים ב-n. נרשום את F_8^{-1}:

כפי שניתן לראות המטריצה ההופכית F_n^{-1} זהה למטריצה המקורית F_n עד כדי החלפת שורות: השורה האפס נשארת אתו הדבר, ושורה j ב- F_n הופכת להיות שורה $n-j$ ב- F_n^{-1}, $j=1,\ldots,n-1$. לכן, ביצוע $DFT^{-1}(Y)$ הוא בדיוק כמו $DFT(Y)$: נתייחס לוקטור Y כעל הקלט של מקדמים בשביל ה-DFT, והתוצאה היא הוקטור c שמתקבל בחילוף שורות. נחליף בחזרה את השורות ונקבל את c כדרוש.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w^7 & w^6 & w^5 & w^4 & w^3 & w^2 & w \\ 1 & w^6 & w^4 & w^2 & w^8 & w^6 & w^4 & w^2 \\ 1 & w^5 & w^2 & w^1 & w^4 & w & w^6 & w^3 \\ 1 & w^4 & w^8 & w^4 & w^8 & w^4 & w^8 & w^4 \\ 1 & w^3 & w^6 & w & w^4 & w^7 & w^2 & w^5 \\ 1 & w^2 & w^4 & w^6 & w^8 & w^2 & w^4 & w^6 \\ 1 & w^1 & w^2 & w^3 & w^4 & w^5 & w^6 & w^7 \end{pmatrix}}_{F_8^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{pmatrix}}_{Y} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \end{pmatrix}}_{C}$$

נבצע $DFT(Y)$ באותה דרך שביצענו $DFT(A)$ בתחילת הדוגמא:

$$Y_0(1)=y_0=60, Y_4(1)=y_4=4,$$
$$Y_2(1)=y_2=8, Y_6(1)=y_6=8$$

$$Y_{04}(1,-1)=(64,56)\quad Y_{26}(1,-1)=(16,0)$$

$$Y_{0246}\begin{pmatrix}1\\ i\\ -1\\ -i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}80\\ 56\\ 48\\ 56\end{pmatrix}$$

$$Y_1(1)=y_1=4+4w+8i+14iw,$$
$$Y_5(1)=y_5=4-4w+8i-14iw,$$
$$Y_3(1)=y_3=4+14w-8i+4iw,$$
$$Y_7(1)=y_7=4-14w-8i-4iw$$
$$Y_{15}(1,-1)=(8+16i,8w+28iw)$$
$$Y_{37}(1,-1)=(-16i+8,28w+8iw)$$

$$Y_{1357}\begin{pmatrix}1\\ i\\ -1\\ -i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16\\ 56iw\\ 32i\\ 16w\end{pmatrix}$$

נאחד את הפתרונות של הזוגיים והאי-זוגיים:

$$Y_{01234567}\begin{pmatrix}1\\ w\\ i\\ iw\\ -1\\ -w\\ -i\\ iw\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}96\\ 0\\ 16\\ 40\\ 64\\ 112\\ 80\\ 72\end{pmatrix}$$

כעת, יש לחלק כל איבר ב-8 ולהפוך את הוקטור. והתוצאה היא וקטור המקדמים c:

$$C=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}96\\ 72\\ 80\\ 112\\ 64\\ 40\\ 16\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\ 9\\ 10\\ 14\\ 8\\ 5\\ 2\\ 0\end{pmatrix}$$

ולכן פולינום המכפלה הוא:

$$C(x)=12+9x+10x^2+14x^3+8x^4+5x^5+2x^6$$

<u>לסיכום</u> כל מה שביצענו הוא:
$C=DFT_{2n}^{-1}\left(DFT_{2n}(A)\times DFT_{2n}(B)\right)$.